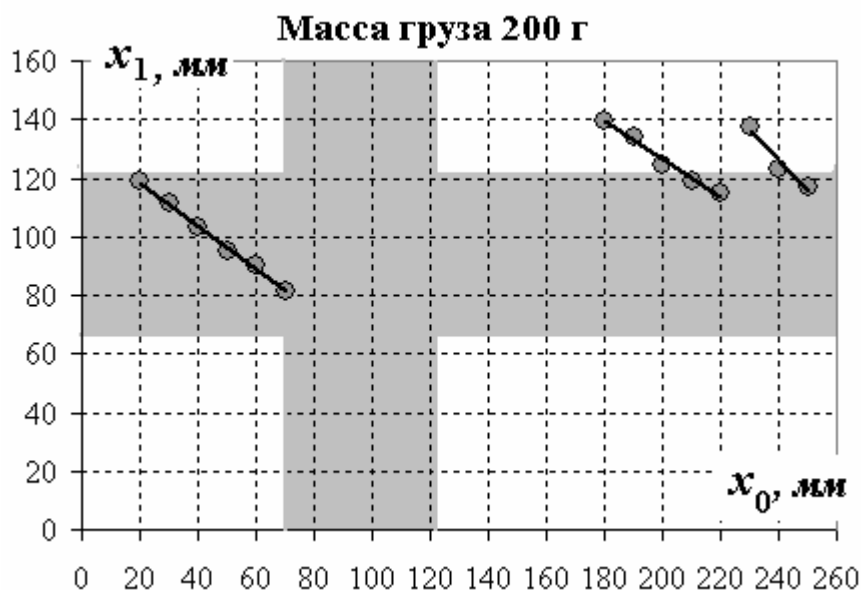


Еще более удивительные результаты получены для груза массой 200 г. Они представлены в таблице 4 и на графике. Методика получения и представления аналогичны предыдущим.

**Таблица 4.**

| $x_0$ , мм | $x_1$ , мм |
|------------|------------|
| 20         | 118,8      |
| 30         | 111,6      |
| 40         | 103,2      |
| 50         | 95,2       |
| 60         | 90,0       |
| 70         | 81,2       |
| 190        | 134,0      |
| 180        | 139,8      |
| 200        | 124,4      |
| 210        | 119,2      |
| 220        | 114,6      |
| 230        | 137,2      |
| 240        | 123,0      |
| 250        | 117,2      |



Здесь даже первая ветвь не соответствует теоретическим предсказаниям, ее коэффициент наклона значительно отличается от -1 (уравнение этого отрезка  $x_1 = -0,75x_0 + 134$ ), поэтому ее нижний край не совпадает с границей зоны застоя. Хотя значение координаты этой

границы  $\tilde{x}_{\min} = \frac{134}{2} \approx 67 \text{ мм}$  очень близко к полученному в первой части  $x_{\min} \approx 64 \text{ мм}$ .

В чем причина уменьшения коэффициента наклона? Непонятно, может, стержень протерся? Но на других стержнях получены аналогичные результаты!

Уравнение второго отрезка  $x_1 = -0,65x_0 + 257$ , показывает еще большее отклонение от теоретического предсказания. Значение координаты верхней границы зоны застоя

$\tilde{x}_{\max} = \frac{257}{2} \approx 128,5 \text{ мм}$  близко к статическому  $x_{\max} \approx 120 \text{ мм}$ , хотя также превышает его.

Самое удивительное произошло с третьим отрезком – у него наклон не в ту сторону! Поэтому обсуждать численные значения смысла не имеет! В чем причина такого радикального отклонения – возможно в этой области груз подпрыгивал выше уровня нерастянутой резинки?

Как видите, задача дает много поводов для дополнительных размышлений и самостоятельных экспериментальных исследований!



### Задача 39. «Трение качения»

1.1 При колебательном движении механическая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий всех тел, образующих систему.

Будем считать, что кинетической энергией деревянной палочки и центрирующего кусочка пластилина на ее конце можно пренебречь в силу малости их массы ( $m \approx 5 \text{ г}$ ) по сравнению с массой груза ( $M \approx 100 \text{ г}$ ).

Тогда кинетическая энергия системы будет определяться только кинетической энергией груза (цилиндра), которая при качении может быть найдена как сумма его кинетических энергий поступательного и вращательного движений

$$E_k = \frac{Mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{M(R\omega)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \omega^2 = \frac{3MR^2}{4} \omega^2, \quad (1)$$

где  $v = \omega R$  - скорость поступательного движения груза,  $\omega$  - угловая скорость вращения груза,  $M$  - его масса,  $J = \frac{MR^2}{2}$  - момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс.

Потенциальная энергия системы при отклонении от положения равновесия определяется только увеличением потенциальной энергии палочки, поскольку грузик движется по горизонтальной поверхности:

$$E_{\text{п}} = mgz(1 - \cos \varphi) \approx mgz \frac{\varphi^2}{2}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — угол отклонения палочки от вертикали в процессе малых ( $\varphi \rightarrow 0$ ) крутильных колебаний,  $z$  - расстояние от оси цилиндра до центра масс палочки  $C$ . Пренебрегая трением запишем уравнение закона сохранения механической энергии

$$\frac{3MR^2}{4} \omega^2 + mgz \frac{\varphi^2}{2} = \text{const},$$

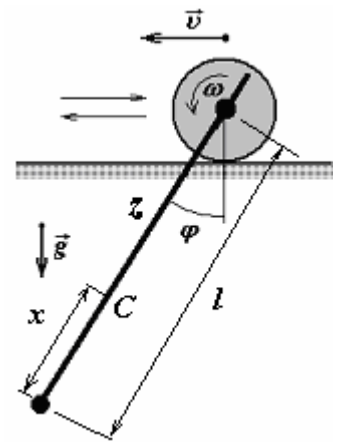
которое совпадает с уравнением гармонических колебаний. Из этого уравнения следует, что период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2mgz}} \quad (3)$$

Таким образом, период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из  $z$  - расстояния от оси цилиндра до центра масс палочки.

1.2 Чтобы не определять экспериментально положение центра масс палочки (с прикрепленным грузом) измерим зависимость периода колебаний от длины части палочки  $l$ , расположенной ниже точки крепления. Расстояние от конца палочки до ее конца обозначим  $x$ . Значение этого параметра можно будет определить непосредственно из измерений зависимости периода колебаний от длины ее части  $l$ . Действительно, зависимость (3) может быть линеаризована следующим образом

$$\frac{1}{T^2} = \frac{2mg}{6\pi^2 MR^2} (l - x) \quad (4)$$



Получив график данной зависимости параметр  $x$ , легко определяется как координата точки пересечения графика с осью абсцисс.

Результаты измерений зависимости периода колебаний от длины  $l$ , а также результаты расчетов величины  $\frac{1}{T^2}$  представлены в таблице. Рядом построен график полученной зависимости.

**Таблица 1.**

| $l, \text{см}$ | $T, \text{с}$ | $1/T^2, \text{с}^{-2}$ |
|----------------|---------------|------------------------|
| 12             | 2,36          | 0,179                  |
| 13             | 2,14          | 0,219                  |
| 14             | 2,03          | 0,242                  |
| 15             | 1,90          | 0,276                  |
| 16             | 1,83          | 0,297                  |
| 17             | 1,68          | 0,355                  |
| 18             | 1,65          | 0,367                  |
| 19             | 1,61          | 0,384                  |

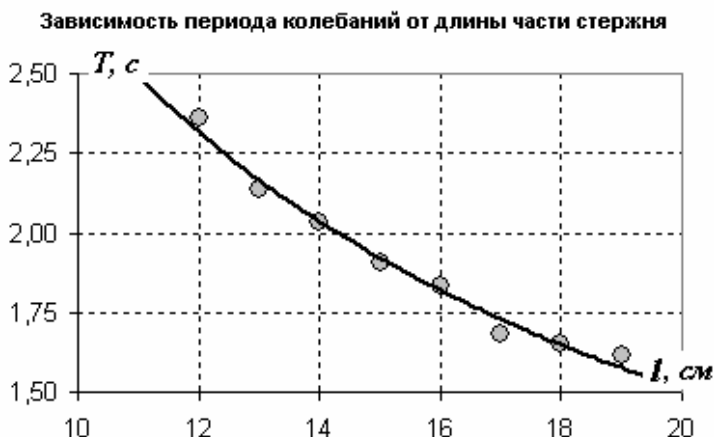
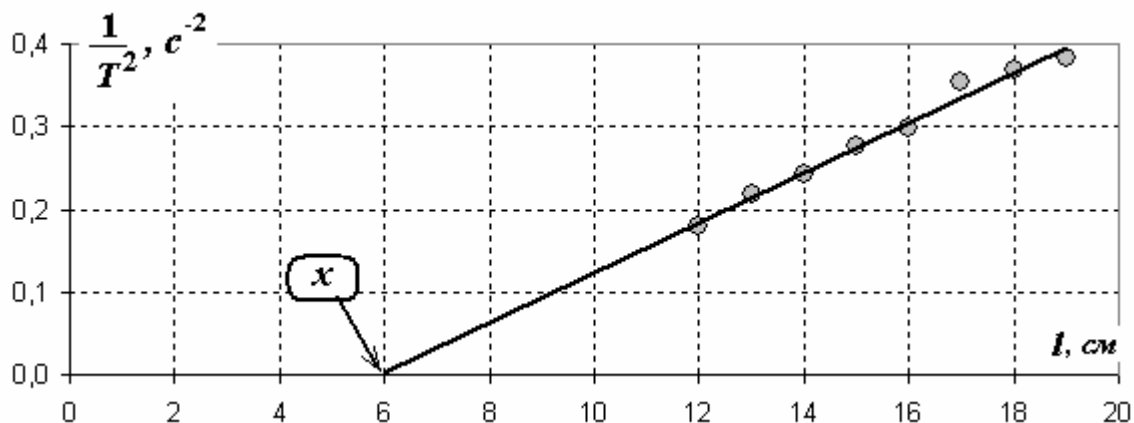


График линеаризованной зависимости (4) близок к прямой линии, что подтверждает полученную формулу для периода колебаний. Иными словами, показатель степени в формуле (1) равен  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

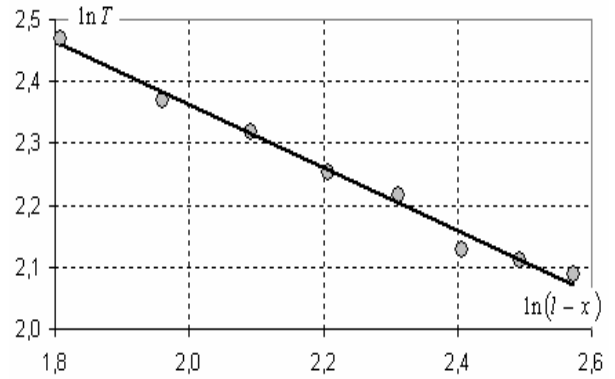
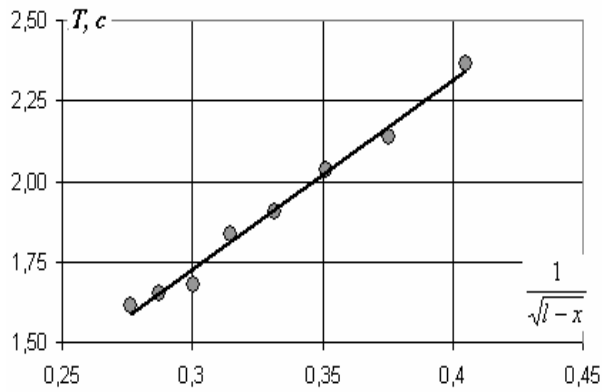


Рассчитанной по этой зависимости (или просто снятое с графика) значение параметра  $x = 5,9 \text{ см}$ .

Отметим, что положение центра масс (то есть значение найденного параметра  $x$ ) можно было определить и экспериментально, например, уравновесив стержень на ребре линейки.

Знание этого параметра позволяет провести проверку формулы для периода колебаний и другими способами. Не сложно построить зависимость периода  $T$  от величины  $\frac{1}{\sqrt{l-x}}$  и убедиться в ее линейности (даже прямой пропорциональности).

Можно также построить график в двойном логарифмическом масштабе:  $\ln T$  от  $\ln(l-x)$ . Приведенные ниже рисунки также подтверждают вид найденный вид зависимости периода колебаний от расстояния до центра масс – формулу (3). Отметим, что значение показателя степени, найденное как коэффициент наклона графика в двойном логарифмическом масштабе равно  $\alpha = 0,51 \pm 0,05$



## Часть 2. Затухание колебаний.

Выполнение этой части начнем с теоретического описания процесса затухания колебаний, которое происходит вследствие трения качения. Так как масса цилиндра значительно больше массы палочки, то можно считать, что сила трения качения равна

$$F_{\text{тр.}} = \frac{K}{R} Mg,$$

а ее работа  $A_{\text{тр.}} = \frac{K}{R} MgS$ , где  $S$  - путь, пройденный цилиндром. Работа силы трения равна убыли механической энергии системы. Измерить энергию можно только в точках остановки, в которых кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная определяется формулой

$$U = -mgz \cos \varphi.$$

В ходе эксперимента следует измерить координаты точек остановок цилиндра  $y_k$  (удобно в ходе колебаний их просто отметить, а затем уже измерять их положение). Заметим, что в данной части колебания не обязаны быть малыми. Если движение происходит без проскальзывания, то угол отклонения палочки от вертикали определяется по формуле

$$\varphi_k = \frac{y_k}{R},$$

а путь до  $k$ -той остановки равен

$$S_k = |y_0| + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \dots = S_{k-1} + |y_k - y_{k-1}|.$$

Таким образом, координаты точек остановки позволяют определить как энергию системы, так и пройденный путь.

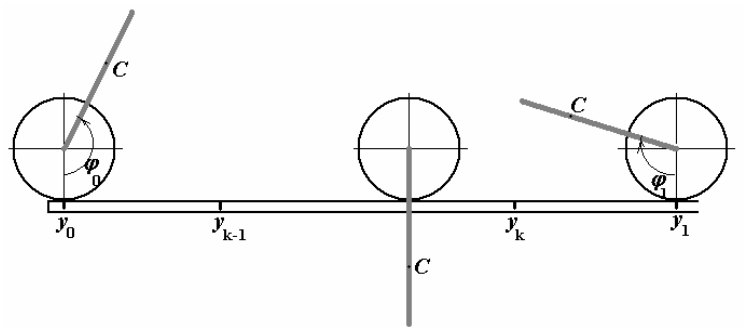
Запишем уравнение закона сохранения механической энергии

$$U_0 - U_k = A_{\text{тр.}}$$

$$mgz(\cos \varphi_k - \cos \varphi_0) = \frac{K}{R} MgS_k.$$

Из этого уравнения получим зависимость, которая может быть получена экспериментально

$$-\cos \varphi_k = -\cos \varphi_0 - \frac{K}{R} \frac{M}{mz} S_k. \quad (5)$$



Отношение масс палочки и цилиндра может быть выражено из формулы для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2mgz}} \Rightarrow \frac{M}{mz} = \frac{T^2 g}{6\pi^2 R^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (5), получим

$$-\cos \varphi_k = -\cos \varphi_0 - K \frac{T^2 g}{6\pi^2 R^3} S_k.$$

Экспериментально легче измерить длину окружности цилиндра  $2\pi R = L$ , обернув его полоской бумаги. Тем самым получим зависимость, которую можно измерить экспериментально и по которой можно определить коэффициент трения качения

$$-\cos 2\pi \frac{y_k}{L} = -\cos \varphi_0 - K \frac{4\pi T^2 g}{3L^3} S_k. \quad (6)$$

В таблице 2 представлены результаты измерений координат точек остановки цилиндра, для наглядности эти же результаты показаны на графике.

**Таблица 2.**

| $k$ | $y_k, \text{мм}$ | $S, \text{мм}$ | $-\cos \varphi_k$ |
|-----|------------------|----------------|-------------------|
| 0   | 47               | 0              | 0,886             |
| 1   | -42              | 89             | 0,722             |
| 2   | 36               | 167            | 0,450             |
| 3   | -32              | 235            | 0,238             |
| 4   | 30               | 297            | 0,127             |
| 5   | -28              | 355            | 0,014             |
| 6   | 26               | 409            | -0,099            |
| 7   | -24              | 459            | -0,211            |
| 8   | 22               | 505            | -0,320            |
| 9   | -21              | 548            | -0,373            |
| 10  | 20               | 589            | -0,425            |
| 11  | -19              | 628            | -0,475            |
| 12  | 17               | 664            | -0,572            |

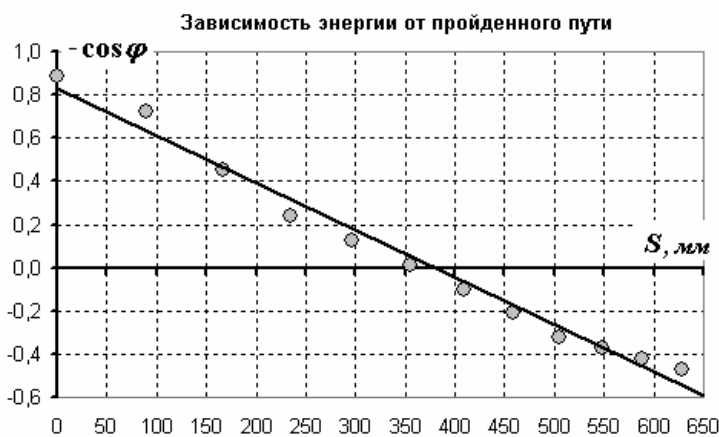


Построенный график зависимости (5) демонстрирует линейную (в пределах погрешности измерений) связь между переменными. Рассчитанный по МНК коэффициент наклона графика оказывается равным

$$a = \frac{\Delta(-\cos \varphi)}{\Delta S} = (-2,19 \pm 0,15) \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}$$

Значение этого параметра позволяет рассчитать коэффициент трения качения (в наших экспериментах  $T = 1,9 \text{ с}$ ,  $L = 111 \text{ мм}$ )

$$a = -K \frac{4\pi T^2 g}{3L^3} \Rightarrow K = -a \frac{3L^3}{4\pi T^2 g} = 2,19 \cdot 10^{-3} \frac{3(111)^3}{4\pi (1,9)^2 \cdot 9,8} \approx 20 \text{ мм}$$





#### Задача 40. «Потери энергии»

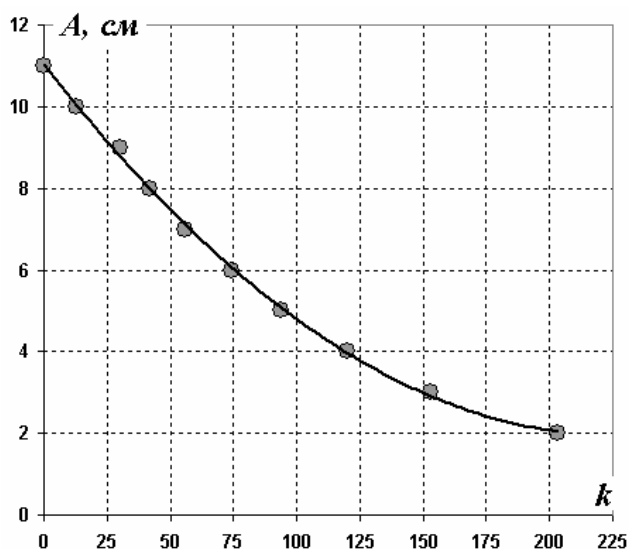
Как было отмечено в комментариях к условию, результаты экспериментов и окончательный вывод о виде зависимости силы сопротивления воздуха от скорости тела зависят от параметров установки – резкой границы между линейной и квадратичной зависимостями не существует. Поэтому при описании экспериментов необходимо точно описывать использованную экспериментальную установку. Здесь приведены данные, полученные с помощью оборудования, описанного ранее в задаче 33.



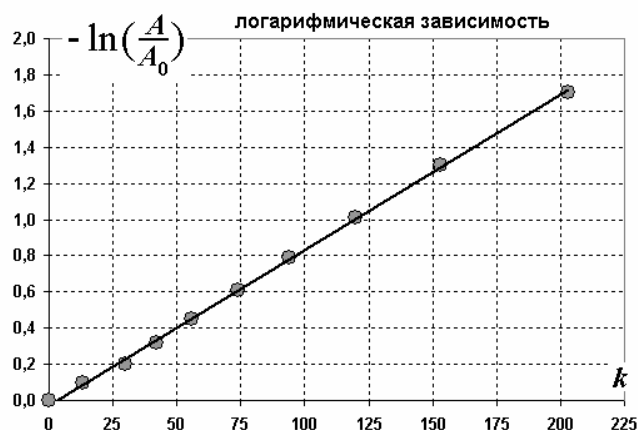
Для проведения измерений надо набраться терпения, для получения значимого результата затухание должно быть слабым, поэтому число подсчитанных колебаний должно быть большим. Так в описываемых экспериментах число колебаний более 200, учитывая, что период колебаний примерно равен 3 с, то общее время непрерывных наблюдений составляет около 10 минут. Очевидно, что в данном эксперименте следует фиксировать амплитуду колебаний и подсчитывать через сколько колебаний амплитуда уменьшится до выбранного значения. Результаты измерений числа этих колебаний  $k$  для монотонно убывающей амплитуды  $A$  представлены в таблице и на графике.

Таблица результатов измерений.

| $k$ | $A, \text{см}$ | $\frac{A_0}{A}$ | $-\ln \frac{A}{A_0}$ |
|-----|----------------|-----------------|----------------------|
| 0   | 11             | 1,000           | 0,000                |
| 13  | 10             | 1,100           | 0,095                |
| 30  | 9              | 1,222           | 0,201                |
| 42  | 8              | 1,375           | 0,318                |
| 56  | 7              | 1,571           | 0,452                |
| 74  | 6              | 1,833           | 0,606                |
| 94  | 5              | 2,200           | 0,788                |
| 120 | 4              | 2,750           | 1,012                |
| 153 | 3              | 3,667           | 1,299                |
| 203 | 2              | 5,500           | 1,705                |



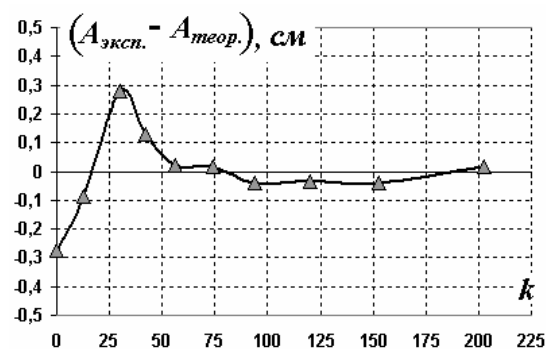
Как и следовало ожидать, амплитуда колебаний монотонно и нелинейно убывает, но по внешнему виду данной зависимости невозможно определить, какой из законов (1) или (2) более точно описывает полученные данные. Поэтому следует провести линеаризацию полученной зависимости, которая в данном случае также очевидна: в первом случае требуется построить график зависимости логарифма амплитуды от числа колебаний; во втором – величины обратной амплитуде колебаний, причем удобнее это сделать в нормированном виде.



Посмотрите на результаты расчетов – вывод однозначен: в данном эксперименте сила сопротивления пропорциональна скорости в первой степени. Коэффициент наклона данной зависимости (из формулы (1) следует, что  $-\ln \frac{A}{A_0} = k \ln \lambda$ ) равен  $-\ln \lambda$ . Расчет

данного коэффициента по МНК дает значение  $-\ln \lambda \approx 8,57 \cdot 10^{-3}$ , следовательно  $\lambda \approx 0,99$ . Иными словами, за одно колебание амплитуда убывает всего на 1%.

Для подтверждения сделанного вывода можно сравнить результаты измерений и расчетов по формуле (1) с найденным значением параметра  $\lambda$ . На рисунке показан график зависимости разности этих значений от числа колебаний. Выводы: во-первых отклонения теоретических и экспериментальных значений малы (менее 3%), во-вторых, носят нерегулярный характер, то есть обусловлены случайными ошибками.





#### Задача 41. «Скольжение диска»

##### Теоретическое введение (необязательное для учащихся)

Если на тело действуют силы трения скольжения и вязкого трения, то по второму закону Ньютона оно приобретает ускорение

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg - \beta v. \quad (1)$$

Чтобы найти зависимость пути, пройденного диском, от его начальной скорости избавимся от времени в этом уравнении

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dS} \frac{dS}{dt} = mv \frac{dv}{dS}. \quad (2)$$

Такая замена позволяет разделить переменные в уравнении (1)

$$mv \frac{dv}{dS} = -\mu mg - \beta v \Rightarrow dS = -\frac{mv dv}{\mu mg + \beta v} \quad (3)$$

и проинтегрировать его

$$S = \int_0^{v_0} \frac{mv dv}{\mu mg + \beta v} = \frac{m}{\beta} v_0 \left( 1 - \frac{\mu mg}{\beta v_0} \ln \left( 1 + \frac{\beta v_0}{\mu mg} \right) \right). \quad (4)$$

При малых значениях параметра  $\xi$  справедлива приближенная формула

$$\ln(1 + \xi) \approx \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3}. \quad (5)$$

Соответственно, при малых значениях  $\frac{\beta v_0}{\mu mg}$  формула (4) превращается в

$$s \approx \frac{m}{\beta} v_0 \left( 1 - \frac{\mu mg}{\beta v_0} \left( \frac{\beta v_0}{\mu mg} - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta v_0}{\mu mg} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\beta v_0}{\mu mg} \right)^3 \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{1}{3} \frac{\beta v_0^3}{\mu^2 m g^2} \quad (6)$$

Относительная погрешность использования формулы (8) не превышает 5% при  $\xi < 0,7$ .

Отметим, что первое слагаемое в данной формуле описывает пройденный путь без учета сопротивления воздуха, а второе – уменьшение пути из-за влияния воздуха.

##### Решение.

1. Для определения массы компакт диска можно воспользоваться «рычажным» методом, используя в качестве рычага линейку, и имея в своем распоряжении груз известной массы. В результате измерений получено, что масса CD равна  $m = (15,3 \pm 0,7) \text{ г}$

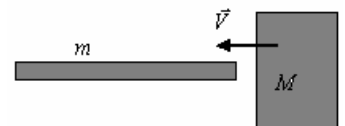
2. Рассмотрим соударение тел. Пусть скорости тел  $M$  и  $m$  после соударения равны  $V^*$  и  $v$  соответственно. Поскольку соударение абсолютно упругое, выполняются законы сохранения импульса и энергии

$$MV = MV^* + mv, \quad (7)$$

$$MV^2 = MV^{*2} + mv^2. \quad (8)$$

отсюда нетрудно получить для скорости тела  $m$

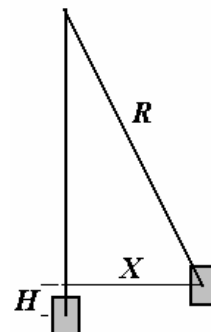
$$v = \frac{2M}{M + m} V. \quad (9)$$





Для используемого компакт-диска и груза коэффициент  $\alpha = \frac{2M}{M+m} = 1,73$ . Относительная погрешность  $\varepsilon_\alpha = \sqrt{\varepsilon_{2M}^2 + \varepsilon_{M+m}^2} \approx 0,01$ . Абсолютная погрешность равна  $\Delta\alpha = \alpha\varepsilon_\alpha \approx 0,02$ . Коэффициент передачи скорости равен  $\alpha = 1,73 \pm 0,02$ .

**3.** Расстояние  $X$  измеряется линейкой, прикрепленной к нижней стороне парты скотчем. Для увеличения точности измерений  $X$  груз необходимо отпускать, когда он находится в вертикальном положении. Измерения смещения компакт-диска по миллиметровой бумаге производятся при помощи самой миллиметровой бумаги. Результаты измерений пройденного пути от начального отклонения груза  $X$  приведены в Таблице 1. По результатам измерений построен график  $s(X)$ .



При смещении груза из положения равновесия на расстояние  $X$  по горизонтали, он поднимается на высоту

$$H = R - \sqrt{R^2 - X^2}, \quad (10)$$

где  $R$  – расстояние от точки подвеса до центра масс груза. При подходе к диску его скорость можно найти из закона сохранения энергии

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g(R - \sqrt{R^2 - X^2})}. \quad (11)$$

Начальная скорость движения компакт-диска

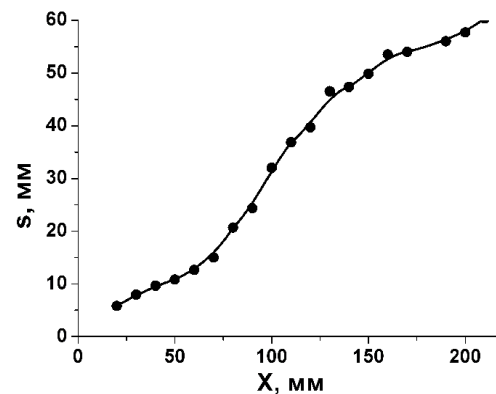
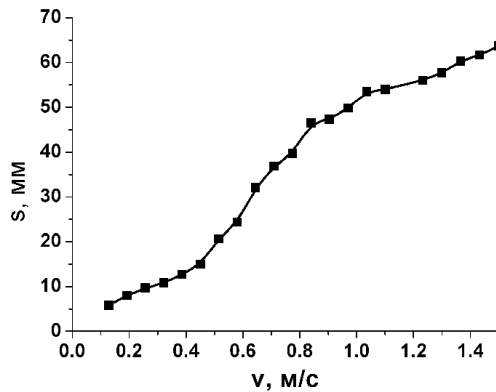
$$v_0 = \alpha V = \alpha \sqrt{2g(R - \sqrt{R^2 - X^2})}. \quad (12)$$

Расстояние от точки крепления нити к лапке штатива до центра масс грузика было равно  $R = 710 \text{ мм}$ .

По измеренным данным и формуле (17) необходимо определить начальную скорость диска  $v_0$ .

**Таблица 1**

| $X$ , мм | $v_0$ , м/с | $s$ , мм | $s/v_0^2$ ,<br>мм·с <sup>2</sup> /м <sup>2</sup> |
|----------|-------------|----------|--|
| 20       | 0.074       | 6        | 1055   |
| 30       | 0.111       | 8        | 643  |
| 40       | 0.149       | 10       | 437  |
| 50       | 0.186       | 12       | 313  |
| 60       | 0.223       | 13       | 254  |
| 70       | 0.261       | 15       | 221  |
| 80       | 0.298       | 21       | 233  |
| 90       | 0.335       | 24       | 217  |
| 100      | 0.373       | 32       | 230  |
| 110      | 0.410       | 37       | 217  |
| 120      | 0.448       | 40       | 198  |
| 130      | 0.485       | 46       | 197  |
| 140      | 0.523       | 47       | 173  |
| 150      | 0.561       | 50       | 158  |
| 160      | 0.599       | 53       | 149  |
| 170      | 0.637       | 54       | 133  |
| 190      | 0.713       | 56       | 110  |
| 200      | 0.751       | 58       | 102  |
| 210      | 0.789       | 60       | 96.8   |
| 220      | 0.828       | 62       | 89.9   |
| 230      | 0.867       | 64       | 84.7   |



Зависимость пройденного пути от начальной скорости диска описывается формулой (6). Для определения коэффициента трения скольжения  $\mu$  и вязкого трения  $\beta$  необходимо эту зависимость линеаризовать и построить график зависимости  $\frac{s}{v_0^2}$  от  $v_0$  (табл. 1).

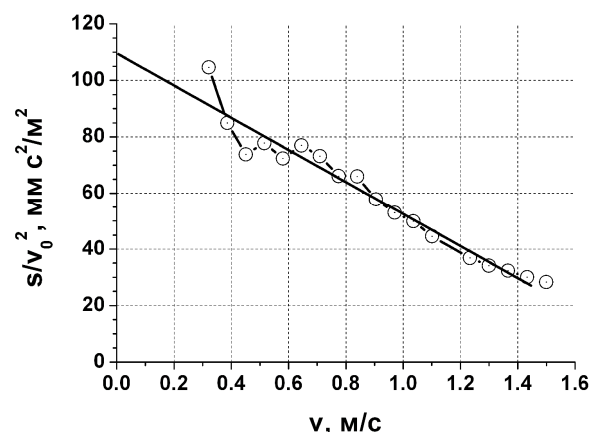
Данная зависимость – убывающая линейная

$$\frac{s}{v_0^2} = A - Bv_0, \quad (13)$$

где  $A = \frac{1}{2\mu g}$ ,  $B = \frac{1}{3\mu^2 mg^2}$ .

Коэффициент  $A$  определяется по точке пересечения графика с вертикальной осью, а коэффициент  $B$  – по тангенсу угла наклона графика к горизонтальной оси. Альтернативный способ определения  $A$  и  $B$  – по МНК.

Поскольку и расстояние  $s$ , и  $X$ , и, соответственно,  $v_0$ , определены с погрешностями, то при делении малых значений друг на друга, результат может получиться абсолютно неверным.



Именно поэтому при построении графика зависимости  $\frac{s}{v_0^2}$  от  $v_0$  и определении коэффициентов  $A$  и  $B$  необходимо брать лишь точки, соответствующие смещению диска больше 10 мм.

Коэффициент  $A = 0,11 \text{ c}^2/\text{м}$ , а  $B = 0,057 \text{ c}^3/\text{м}^2$ . Отсюда

$$\mu = \frac{1}{2gA} = 0,46, \quad (19)$$

$$\beta = 3\mu^2 mg^2 B = 0,053 \text{ кг/с}. \quad (20)$$

Формула (9) применима только для малых значений  $\frac{\beta v_0}{\mu mg} < 0,7$ , поэтому необходимо

проверить малость этого выражения. Максимальное значение начальной скорости диска, для которой погрешность формулы не превышает 5%, равно  $v_{\max} = 0,7\mu mg / \beta = 0,91 \text{ м/с}$ . Как видно из таблицы 1, в эксперименте скорость диска не превышает этого значения. Иначе точки, соответствующие скоростям, большим максимально допустимой, необходимо было бы отбросить при определении коэффициентов  $A$  и  $B$ .



## Задача 42. «Белый цилиндр»

1. На рисунке показана схема установки для проведения исследования зависимости деформации пружины от приложенной к ней силы. Из рисунка следует, что в положении равновесия сила упругости пружины определяется формулой

$$F_{\text{упр.}} = mg \frac{x}{L}, \quad (1)$$

где  $L = 40 \text{ см}$  - длина линейки,  $mg \approx 1,0 \text{ Н}$  - сила тяжести, действующая на груз.

Изменяя положение груза  $x$ , можно изменять силу, действующую на пружину. В Таблице 1 приведены результаты измерений деформации пружины  $\Delta l, (\text{мм})$  от расстояния  $x, (\text{см})$  между закрепленным краем линейки и точки подвеса груза.

Таблица 1.

|                         |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| $x, (\text{см})$        | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| $\Delta l, (\text{мм})$ | 2  | 5  | 9  | 12 | 15 | 17 | 21 | 24 | 27 | 30  |
| $x, (\text{см})$        | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| $\Delta l, (\text{мм})$ | 33 | 36 | 38 | 41 | 42 | 45 | 47 | 49 | 52 | 54  |
| $x, (\text{см})$        | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| $\Delta l, (\text{мм})$ | 57 | 59 | 61 | 64 | 66 | 68 | 70 | 73 | 75 | 77  |
| $x, (\text{см})$        | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| $\Delta l, (\text{мм})$ | 79 | 82 | 85 | 87 | 88 | 91 | 93 | 95 | 97 | 101 |

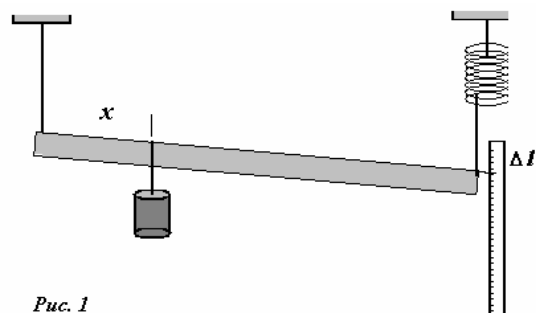


Рис. 1

График этой зависимости представлен на рис. 2

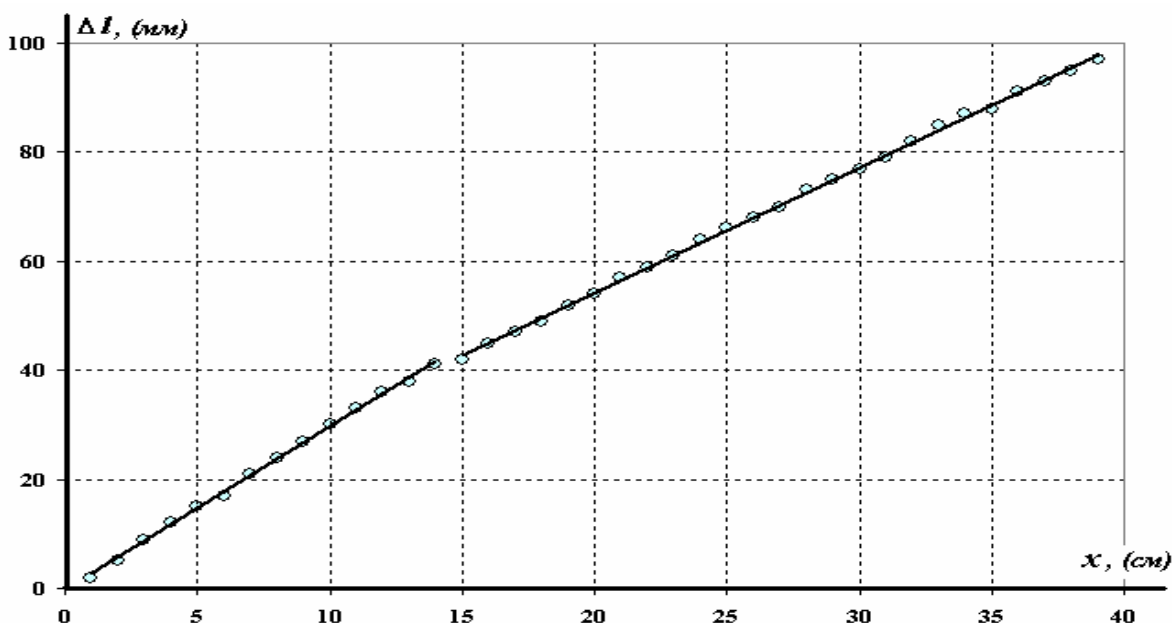


Рис. 2

Так как сила, приложенная к пружине, пропорциональна координате точки подвеса груза, то требуемый график зависимости деформации от приложенной силы будет иметь тот же вид, только необходимо провести иную градуировку оси абсцисс в соответствии с формулой (1).

Полученный график представляет собой ломанную, состоящую из двух прямолинейных отрезков. Объяснение такой зависимости очевидно: при малых нагрузках деформируется вся пружина, когда деформация пружины достигает значения  $\Delta l \approx 40 \text{ мм}$  нить, связывающая часть витков пружины, натягивается и препятствует дальнейшей деформации этих витков, поэтому коэффициент упругости пружины возрастает.

2. В соответствии с законом Гука, сила упругости пропорциональна деформации пружины

$$F_{\text{упр.}} = k\Delta l, \quad (2)$$

где  $k$  - коэффициент жесткости пружины. Из формул (1) – (2) следует, что коэффициент жесткости пружины может быть рассчитан по формуле

$$k = \frac{mg}{L} \frac{x}{\Delta l}. \quad (3)$$

Для повышения точности следует воспользоваться полученной зависимостью, из которой следует определить коэффициент наклона первого отрезка

$$a_1 = \frac{\delta(\Delta l)}{\delta(x)} \approx 3,0 \frac{\text{мм}}{\text{см}} = 0,30. \quad (4)$$

Следовательно, коэффициент жесткости пружины равен

$$k = \frac{mg}{L} \frac{1}{a_1} \approx \frac{0,10 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{0,40 \text{ м} \cdot 0,30} \approx 8,2 \frac{\text{н}}{\text{м}}. \quad (5)$$

3. Легко показать, что жесткость пружины обратно пропорциональна числу свободных витков, или пропорциональна коэффициенту наклона о графика зависимости деформации пружины от координаты груза. Если обозначить  $\eta$  - долю витков, обмотанных нитью, то доля свободных витков равна

$$1 - \eta = \frac{a_2}{a_1}, \quad (6)$$

где  $a_2 = \frac{\delta(\Delta l)}{\delta(x)} \approx 2,3 \frac{\text{мм}}{\text{см}} = 0,23$  - коэффициент наклона второго отрезка на графике рис.2.

По формуле (6) находим

$$1 - \eta \approx \frac{0,23}{0,30} \approx 0,77. \quad (7)$$

Таким образом, обмотано примерно четвертая часть витков (точнее  $\eta \approx 0,23$ ).



### Задача 43. «Одна резинка, один грузик»

Одна из возможных схем проведения измерений заключается в следующем. Прикрепить к стержню горизонтально расположенного штатива резиновый жгут, степень растяжения которого можно изменять. Затем к середине жгута подвесить груз известной массы и измерить величину прогиба (провисания) жгута  $x$ .

Обозначим  $L$  - длина нерастянутого жгута,  $l_0$  - расстояние между точками закрепления жгута на стойке штатива. Удлинение жгута рассчитывается по формуле

$$\Delta l = \sqrt{l_0^2 + 4x^2} - L \quad (1)$$

Сила упругости определяется из условия равновесия груза

$$N = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = \frac{mg \sqrt{l_0^2 + 4x^2}}{4x}. \quad (2)$$

Изменяя расстояние между точками закрепления можно варьировать силу натяжения жгута и его деформацию.

Масса груза равна  $100 \text{ г}$ , следовательно  $mg \approx 1,0 \text{ н}$ . Длина нерастянутой резинки в наших экспериментах  $L = 15 \text{ см}$ . Результаты измерений и расчетов представлены в таблице и на графике.

**Таблица.**

| № | $l_0, \text{см}$ | $x, \text{см}$ | $\Delta l, \text{см}$ | $N, \text{Н}$ |
|---|------------------|----------------|-----------------------|---------------|
| 1 | 15               | 4,0            | 2,0                   | 2,1           |
| 2 | 17               | 3,3            | 3,2                   | 2,8           |
| 3 | 20               | 2,8            | 5,8                   | 3,7           |
| 4 | 23               | 2,5            | 8,5                   | 4,7           |
| 5 | 25               | 2,3            | 10,4                  | 5,5           |
| 6 | 28               | 2,2            | 13,3                  | 6,4           |
| 7 | 30               | 2,1            | 15,3                  | 7,2           |

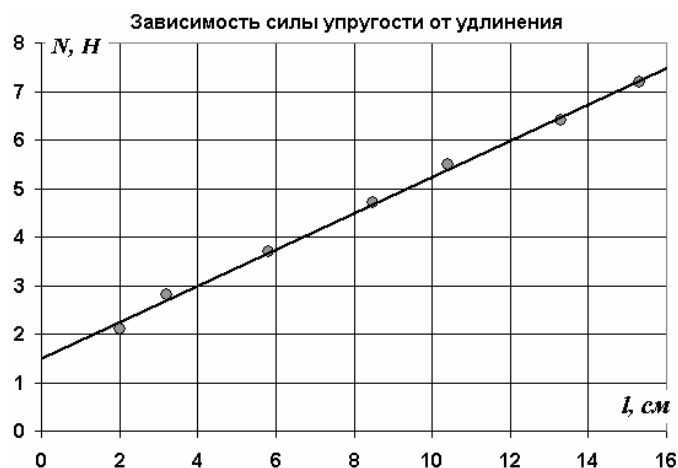


График является прямой линией, поэтому можно считать, что в данном случае закон Гука выполняется (правда он не проходит через начало координат). Коэффициент наклона графика равен жесткости резинки, которая в данном случае оказывается равной

$$k \approx 37 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$



#### Задача 44. «Пластичность»

Результаты измерения деформации тонкой (ширина 5 мм) и широкой (ширина 10 мм) полосок при увеличении и уменьшении нагрузки приведены в таблице.

| Сила $F, Н$ | Тонкая полоска |                | Широкая полоска |                |
|-------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|
|             | нагрузка       | разгрузка      | нагрузка        | разгрузка      |
|             | $\Delta l, мм$ | $\Delta l, мм$ | $\Delta l, мм$  | $\Delta l, мм$ |
| 0           | 0              | 2              | 0               | 0              |
| 1           | 2              | 4              | 1               | 1              |
| 2           | 3              | 5              | 2               | 2              |
| 3           | 4              | 6              | 3               | 3              |
| 4           | 7              | 7              | 4               | 4              |
| 5           | 9              | 11             | 6               | 5              |
| 6           | 13             | 13             | 7               | 7              |

Представим теперь полученные зависимости графически в зависимости деформации  $\Delta l, мм$  от приложенной силы  $F, Н$ . Для широкой полоски данный график показан на рис.1.

Как видно, в данном случае деформация полоски оказывается прямо пропорциональной приложенной силе, что свидетельствует о применимости закона Гука. То есть деформации являются упругими и обратимыми, поэтому потерь механической энергии не происходит.

Коэффициент упругости  $k = \frac{\Delta F}{\Delta l}$  оказывается

близок к  $1,0 \cdot 10^3 \frac{Н}{м}$ . Заметим, что при длине данной полоски в 205 мм ее максимальная относительная деформация составляет 3%.

Принципиально иная ситуация появляется при деформации тонкой полиэтиленовой полоски. График зависимости ее деформации от приложенной нагрузки показан на рис.2, где нижняя ветвь соответствует растяжению, а нижняя - сокращению. Во-первых, деформация оказывается не пропорциональной приложенной силе (переходит в область пластической деформации); во-вторых, деформации при нагрузке и разгрузке оказываются различными - имеет место остаточная деформация и гистерезис (необратимая деформация), что также свидетельствует о наличии пластичности.

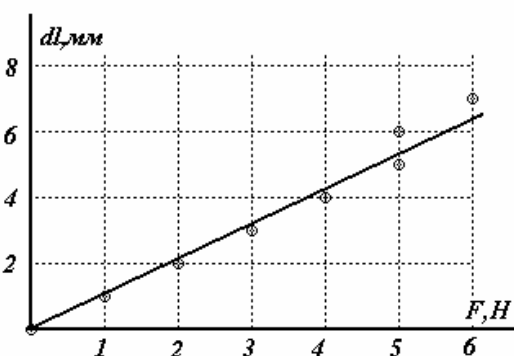
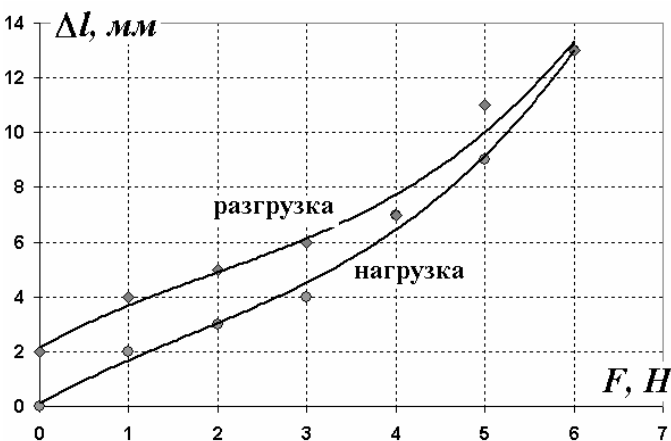


Рис.1



Сравним численные характеристики полученных зависимостей для разных полосок. Как следует приведенных в таблице и на графике данных пластическая деформация начинается при силе превышающей 3 Н (заметим, что относительные деформации в этой точке оказываются приблизительно одинаковыми). Если сравнивать силы, приходящиеся на единицу ширины, то видно, что для широкой полоски этап пластичности должен наступить при силе превышающей 6 Н, поэтому эти данные не противоречат друг другу. Так же следует отметить, что в области упругой деформации коэффициент жесткости тонкой полоски оказывается приблизительно в два раза меньше, что также легко объяснимо - в области упругой деформации модули Юнга у обеих полосок одинаковы, также одинаковы толщины полосок, поэтому коэффициент жесткости пропорционален ширине полоски, что и получено в нашем эксперименте.

2. Легко показать, что потери упругой энергии равны площади полученной петли гистерезиса, которую можно подсчитать численно, с помощью построенного графика.



#### Задача 45. «Резиновый маятник»

Получим формулу для периода колебаний груза на резиновом подвесе. На основании второго закона Ньютона запишем

$$ma = mg - F, \quad (1)$$

где  $F = F(x)$  - сила упругости, которая сложным образом зависит от величины деформации резинового жгута.

При некоторой длине жгута  $x_0$  груз находится в равновесии, то есть  $F(x_0) = mg$ . При небольшом отклонении от положения равновесия  $\Delta x$  зависимость силы упругости от деформации может быть аппроксимирована линейной функцией

$$F(x) \approx F(x_0) + k\Delta x, \quad (2)$$

где коэффициент наклона касательной равен производной от функции  $F(x)$ , взятой в точке  $x_0$ :  $k = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0}$ . Так как положение равновесия зависит от массы подвешенного

груза, то и этот коэффициент также зависит от массы груза  $k(m)$ . В том же случае, когда сила упругости строго пропорциональна деформации, этот коэффициент остается постоянным.

*Заметим, что этот коэффициент нельзя определять как отношение силы упругости к деформации.*

Комбинация выражений (1) и (2) приводит к уравнению гармонических колебаний

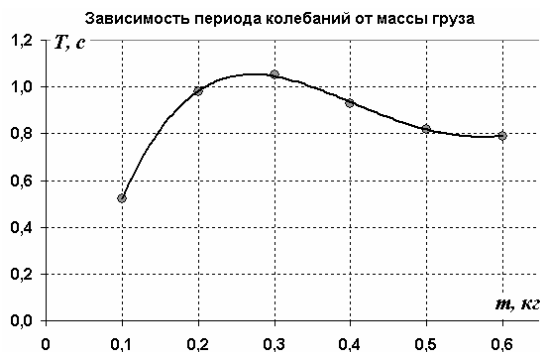
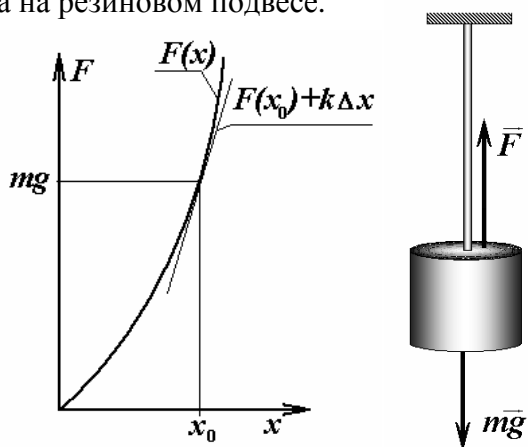
$$ma = -k\Delta x,$$

с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k(m)}}. \quad (3)$$

Таким образом, зависимость коэффициента упругости от нагрузки можно изучать по зависимости периода колебаний от нагрузки.

Результаты измерений зависят от используемых резиновых жгутов. Если использовать полоски резины, вырезанные из медицинского резинового бинта, то для широкой полоски (шириной более 5 мм) закон Гука выполняется в пределах погрешности измерений: деформация пропорциональна массе груза; период колебаний пропорционален корню квадратному из массы. Для более тонкого жгута деформации нелинейно зависят от нагрузки, для резины коэффициент жесткости возрастает с ростом деформации, поэтому период колебаний возрастает медленнее, возможна даже ситуация когда зависимость периода от массы является не монотонной: при небольших массах период возрастает, а затем начинает убывать вследствие более быстрого возрастания коэффициента жесткости резины. Пример такой зависимости показан на рисунке.







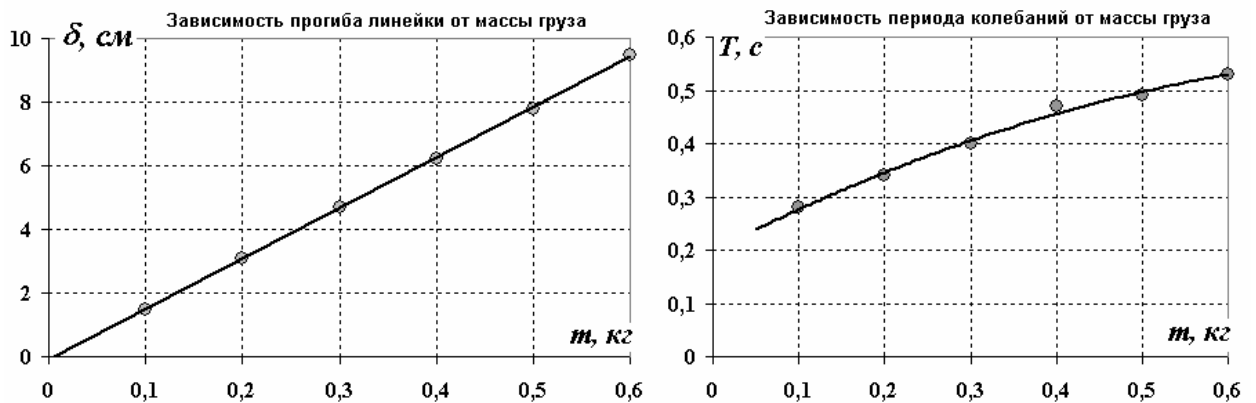
#### Задача 46. «Упругость линейки»

В таблице 1 приведены результаты измерений зависимости прогиба линейки и периода колебаний от массы подвешенного груза.

Таблица 1.

|                     |      |      |      |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|
| $m, \text{кг}$      | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  |
| $\delta, \text{см}$ | 1,5  | 3,1  | 4,7  | 6,2  | 7,8  | 9,5  |
| $T, \text{с}$       | 0,28 | 0,34 | 0,40 | 0,47 | 0,49 | 0,53 |

Ниже на графиках построены полученные экспериментальные зависимости.



Как следует из построенного графика, прогиб линейки линейно зависит от массы подвешенного груза. Обработка зависимости  $\delta = am + b$  по МНК дает следующие значения параметров

$$a = (15,9 \pm 0,3) \frac{\text{см}}{\text{кг}}, \quad b = (-0,09 \pm 0,10) \text{см} \quad (1)$$

Так как  $\Delta b > |b|$ , то обосновано можно считать, что прогиб пропорционален массе подвешенного груза. Иными словами в данном случае выполняется закон Гука: возникающая вертикальная сила упругости пропорциональна деформации

$$F = k\delta, \quad (2)$$

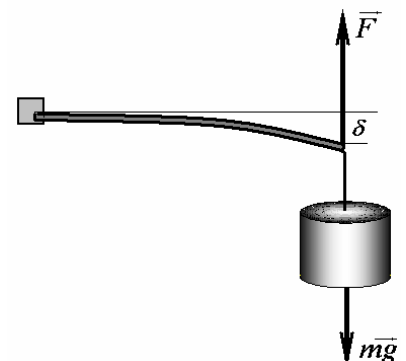
где  $k$  - жесткость линейки, которая может быть выражена через коэффициент наклона построенного графика

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta \delta} = g \frac{\Delta m}{\Delta \delta} = \frac{g}{a} = \frac{9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{15,9 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{кг}}} \approx 61,6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (3)$$

Рассчитаем также погрешность этой величины

$$\Delta k = k \frac{\Delta a}{a} \approx 1,2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (4)$$

Зависимость периода колебаний от массы груза явно не линейна. Теоретически установить этой зависимости можно на основании уравнения второго закона Ньютона для груза



$$ma = mg - k\delta, \quad (5)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6)$$

Для проверки этой зависимости построим график зависимости квадрата периода от массы груза. Действительно данная зависимость близка к линейной. Коэффициент наклона этого графика так же определяются по МНК

$$a = (0,41 \pm 0,01) \frac{с^2}{кг} \quad (7)$$

Из формулы (6) следует, что его теоретическое значение равно

$$a = \frac{4\pi^2}{k},$$

что дает возможность определить жесткость линейки (независимо, на основании результатов измерений периодов колебаний)

$$k \approx (96 \pm 3) \frac{Н}{м} \quad (7)$$

Это значение в полтора раза превышает жесткость, найденную в статическом случае, следовательно, полученные данные не согласуются друг с другом!

Попробуем проверить данный вывод еще одним способом, исключаям расчет жесткости. В положении равновесия сила тяжести уравновешивается силой упругости  $mg = k\delta_0$ , поэтому жесткость линейки выражается через прогиб в положении равновесия

$$k = \frac{mg}{\delta_0}.$$

Подставляя это выражение в формулу (6) получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_0}{g}}. \quad (8)$$

Теперь построим зависимость квадрата периода колебаний от прогиба. Зависимость линейна и ее параметры равны

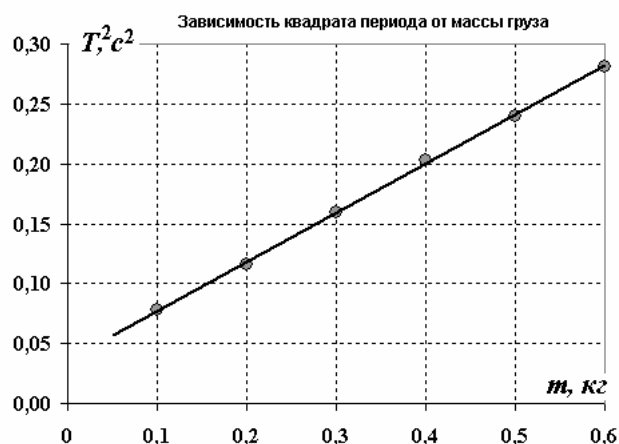
$$a = (2,57 \pm 0,08) \frac{с^2}{м}, \quad b = (0,392 \pm 0,005) с^2$$

Заметим, что в данном случае мы не можем считать зависимость пропорциональной, так как параметр  $b$  значимо отличен от нуля. Из формулы (8) найдем теоретическое значение коэффициента наклона

$$a_{теор.} = \frac{4\pi^2}{g} \approx 4 \frac{с^2}{м},$$

которое оказывается в полтора раза выше! Таким образом, данные и здесь не согласуются друг с другом.

В чем же причина такого несоответствия? Возможно, что колебания груза не являются строго гармоническими – на верхнем участке они «подпрыгивают». Этот отрицательный результат – тема для ваших самостоятельных исследований!

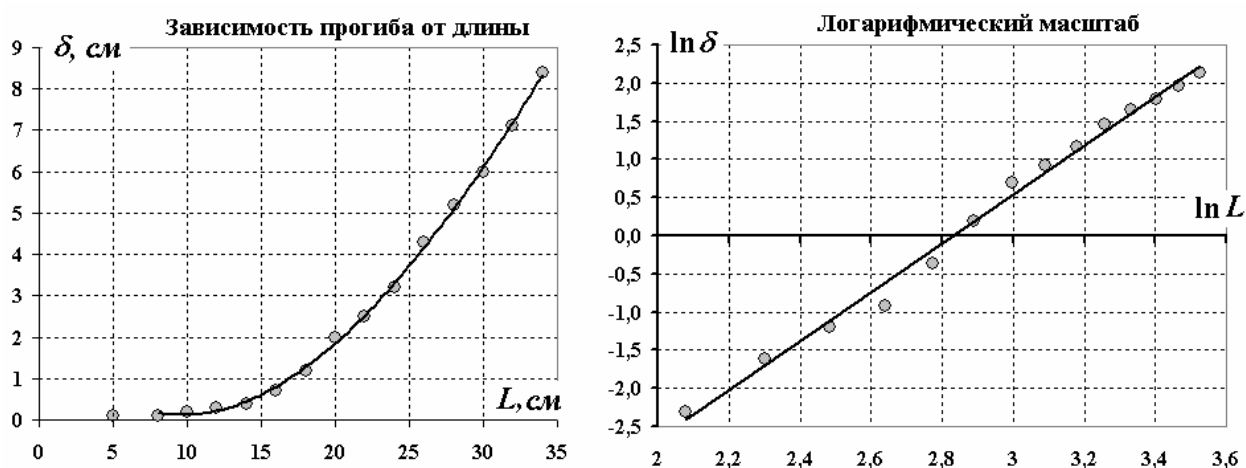


Зато выполнение пункта 2 данной задачи не вызывает никаких сложностей. Проводим измерения (Таблица 2).

**Таблица 2.**

|                     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $L, \text{см}$      | 5   | 8   | 10  | 12  | 14  | 16  | 18  | 20  |
| $\delta, \text{см}$ | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,7 | 1,2 | 2,0 |
| $L, \text{см}$      | 22  | 24  | 26  | 28  | 30  | 32  | 34  |     |
| $L, \text{см}$      | 2,5 | 3,2 | 4,3 | 5,2 | 6,0 | 7,1 | 8,4 |     |

Строим графики в «обычном» и логарифмическом масштабах.



Находим коэффициент наклона логарифмической зависимости, равный искомому показателю степени, убеждаемся, что он примерно равен 3, приводим этот результат и получаем максимальные оценки за правильное выполнение этого пункта!



### Задача 47. «Как надо прогибаться»

Внимательное ознакомление с условием позволяет более четко уяснить смысл предложенных заданий. Понятно, что во всех пунктах следует пренебрегать деформацией деревянной палочки по сравнению с изгибом пластикового стержня. Поэтому в первой части работы исследуется зависимость деформации от приложенного к стержню момента сил. Можно ожидать, что величина прогиба будет пропорциональна этому моменту сил. Во второй части необходимо исследовать зависимость прогиба от длины деформируемой части. Фактически полное повторение предыдущей задачи!

#### Часть 1. Малый груз.

**1.1** Понятно, что деформация деревянной палочки значительно меньше, чем деформация пластикового стержня, поэтому ею можно пренебречь.

Так как угол изгиба мал, то величина стрелки прогиба может быть представлена в виде (с учетом приближенной формулы  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ )

$$\delta = R - R \cos \alpha \approx R \frac{\alpha^2}{2}$$

При подвешивании груза к палочке изгибается весь стержень, поэтому в формуле (1) из условия задачи следует положить  $x = l$ . Тогда  $R\alpha = l$ , а величина стрелки прогиба

$$\delta = \frac{R\alpha^2}{2} = \frac{l\alpha}{2} = \frac{l}{2} KM_0 l = \frac{Kl^2}{2} M_0$$

Измеряемое отклонение конца стержня описывается формулой

$$\begin{aligned} z &= \delta + (L-l)\alpha = \frac{l\alpha}{2} + (L-l)\alpha = \left(L - \frac{l}{2}\right)\alpha = \left(L - \frac{l}{2}\right)KM_0 l = \\ &= K\left(L - \frac{l}{2}\right)l \cdot M_0 \end{aligned}$$

Момент сил, действующих на стержень, определяется силой тяжести груза массой  $m_1$  и деревянной палочки

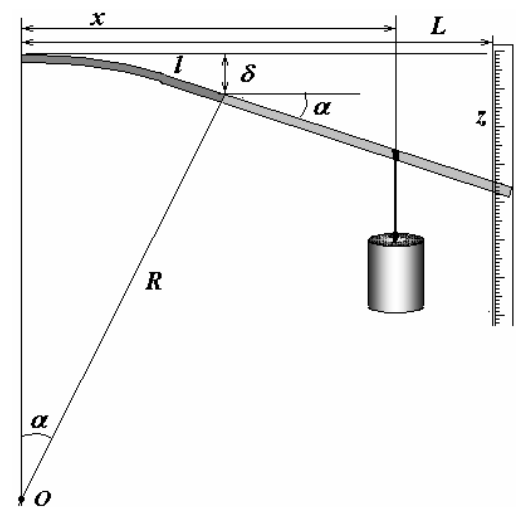
$$M_0 = m_1 gx + m_0 ga,$$

где  $a$  - координата центра масс палочки,  $m_0$  - ее масса.

Таким образом, получаем формулу, подлежащую экспериментальной проверке

$$z = K\left(L - \frac{l}{2}\right)l \cdot M_0 = K\left(L - \frac{l}{2}\right)lm_1 g \left(x + \frac{m_0}{m_1} a\right) = C_1 \left(x + \frac{m_0}{m_1} a\right), \quad (1)$$

которая утверждает, что смещение палочки линейно зависит от координаты точки крепления груза.



1.2 В таблице 1 приведены результаты измерений зависимости смещения конца стержня от координаты точки крепления груза.

Таблица 1.

|              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| <b>x, см</b> | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| <b>z, мм</b> | 19 | 22 | 25 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 |
| <b>x, см</b> | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| <b>z, мм</b> | 45 | 50 | 54 | 58 | 61 | 64 | 68 | 72 | 75 |

График этой зависимости показан ниже и показывает, что полученная зависимость близка к линейной. Возможные отклонения связаны с неточностью измерений и возможными остаточными деформациями.



Следует отметить, что прямая не проходит через начало координат. Из полученной формулы (1) следует, что при  $x = 0$  (т. е. когда груз отсутствует) отклонение стержня должно быть положительным – экспериментальные данные противоречат этому выводу!

Обработка полученной зависимости по МНК дает следующие значения параметров линейной зависимости  $z = ax + b$

$$a = (3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-1}, \quad b = (-27 \pm 3) \text{ мм},$$

следовательно, не верный знак параметра  $b$  не может быть объяснен погрешностями измерений.

Возможное объяснение этого противоречия заключается в начальной деформации стержня! Действительно, при отсутствии груза стержень вместе с палочкой располагался горизонтально, хотя на него действовал момент силы тяжести палочки. Формула (1) не учитывает этой начальной деформации.

## Часть 2. Большой груз.

В данном эксперименте можно считать, что изгибается только часть стержня – от точки крепления до точки подвеса груза. Прежде всего, получим формулу, позволяющую рассчитывать значение стрелки прогиба по измеряемым величинам  $x$  и  $z$ . Из рисунка следует, что

$$z = \delta + (L - x)\alpha. \quad (2)$$

Значение угла изгиба можно выразить через значение стрелки прогиба

$$\delta = \frac{R\alpha^2}{2} = \frac{x\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\delta}{x}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2), получим

$$z = \delta + (L - x)\alpha = \delta + (L - x)\frac{2\delta}{x} = \delta \frac{2L - x}{x}.$$

Отсюда получаем

$$\delta = \frac{zx}{2L - x}. \quad (3)$$

В таблице (2) представлены результаты измерений зависимости  $z(x)$  и рассчитанные по формуле (3) значения стрелки прогиба (в нашей установке  $L = 30\text{ см}$ ). Ниже приведены требуемые графики.

**Таблица 2.**

| $x, \text{ см}$ | $z, \text{ мм}$ | $\delta, \text{ мм}$ |
|-----------------|-----------------|----------------------|
| 0               | 0               |                      |
| 1               | 2               | 0,034                |
| 2               | 4               | 0,14                 |
| 3               | 6               | 0,32                 |
| 4               | 10              | 0,71                 |
| 5               | 14              | 1,27                 |
| 6               | 18              | 2,00                 |
| 7               | 23              | 3,04                 |
| 8               | 28              | 4,31                 |
| 9               | 35              | 6,18                 |
| 10              | 43              | 8,60                 |
| 11              | 51              | 11,45                |
| 12              | 60              | 15,00                |



Полученные результаты свидетельствуют, что полученные зависимости не линейны и по виду похожи на степенные функции.

Получим теоретическую зависимость стрелки прогиба от точки крепления груза. Так как изгибается только часть стержня длиной  $x$ , то величина стрелки прогиба рассчитывается по формуле

$$\delta = \frac{x\alpha}{2} = \frac{x}{2} KM_0 x = \frac{K}{2} M_0 x^2.$$

Силами, изгибающими стержень, являются силы тяжести груза и палочки, поэтому

$$\delta = \frac{K}{2} M_0 x^2 = \frac{K}{2} (m_2 g x + m_0 g a) x^2.$$

Если пренебречь моментом силы тяжести палочки, то получим требуемую степенную зависимость

$$\delta = \frac{K}{2} (m_2 g x + m_0 g a) x^2 \approx \frac{K m_2 g}{2} x^3. \quad (4)$$

Таким образом, теоретическое значение показателя степени  $\alpha = 3$ .

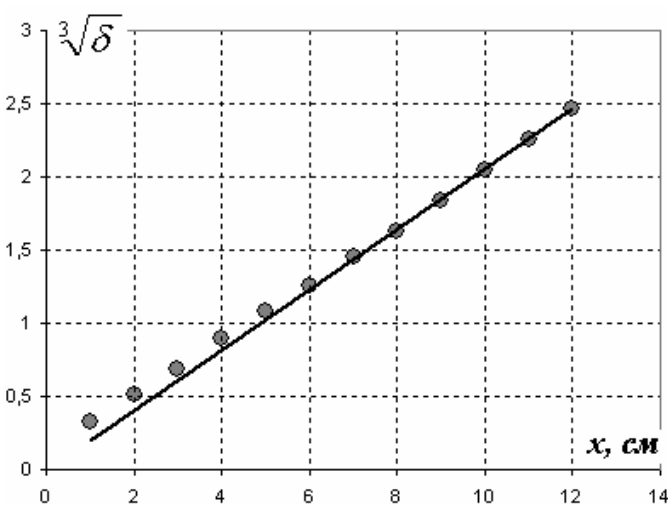
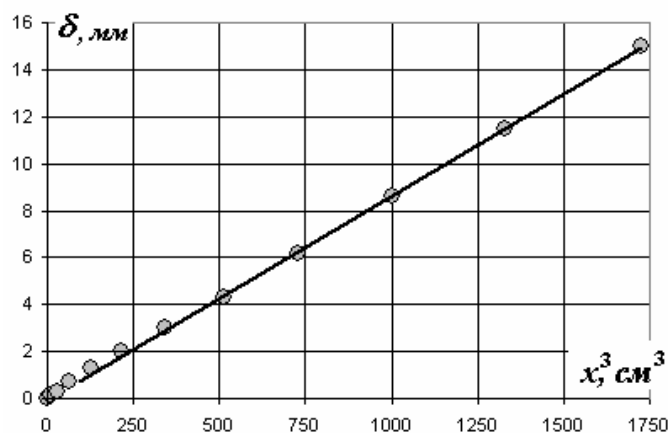
Проверить справедливость полученной формулы (3) можно несколькими способами. Наиболее очевидной линеаризацией является зависимость стрелки прогиба от куба координаты точки подвеса груза  $\delta(x^3)$ .

График данной зависимости очень близок к прямой. Отклонения от линейной зависимости хорошо заметны при малых значениях координаты точки подвеса. Это результат легко объяснить: во-первых, при малых отклонениях точность измерений не велика; во-вторых, при малых значениях  $x$  более существенное влияние оказывает сила тяжести палочки. Следовательно, в этой области исследуемая зависимость должна отличаться от кубической.

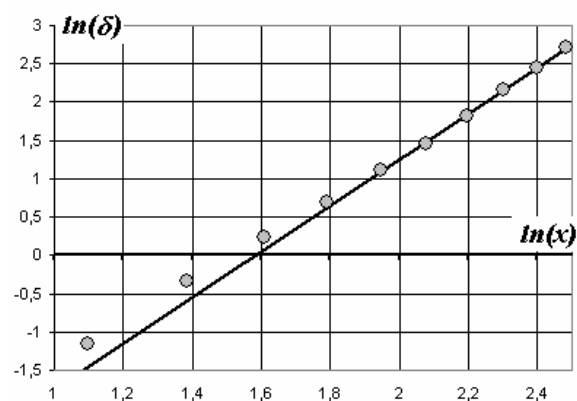
Аналогичные выводы следуют и в том случае, если построить зависимость кубического корня из стрелки прогиба от координаты точки подвеса  $\sqrt[3]{\delta}(x)$ . Также при больших значениях координаты точки подвеса зависимость линейна, а при малых — хорошо видны отклонения от этой зависимости.

Отметим, что эта зависимость  $\sqrt[3]{\delta}(x)$  более наглядна, здесь точки располагаются более равномерно. В зависимости  $\delta(x^3)$  слишком велик диапазон изменения аргумента, а начальные точки тесно группируются вблизи нуля.

Подчеркнем, что в обоих случаях построенные прямые в пределах погрешности проходят через начало координат.



Наконец, для определения показателя степенной зависимости является использование двойного логарифмического масштаба с последующей обработкой по МНК. В этой зависимости  $\ln(\delta)$  от  $\ln(x)$  наблюдаются уже отмеченные закономерности: линейность при больших значениях  $x$  и отклонения от нее при малых значениях. Коэффициент наклона прямой (он же показатель степени), построенной по 6 последним точка оказывается равным  $\alpha = 2,99 \pm 0,09$ .



Таким образом, кубическая зависимость величины стрелки прогиба от точки крепления груза подтверждается экспериментально.



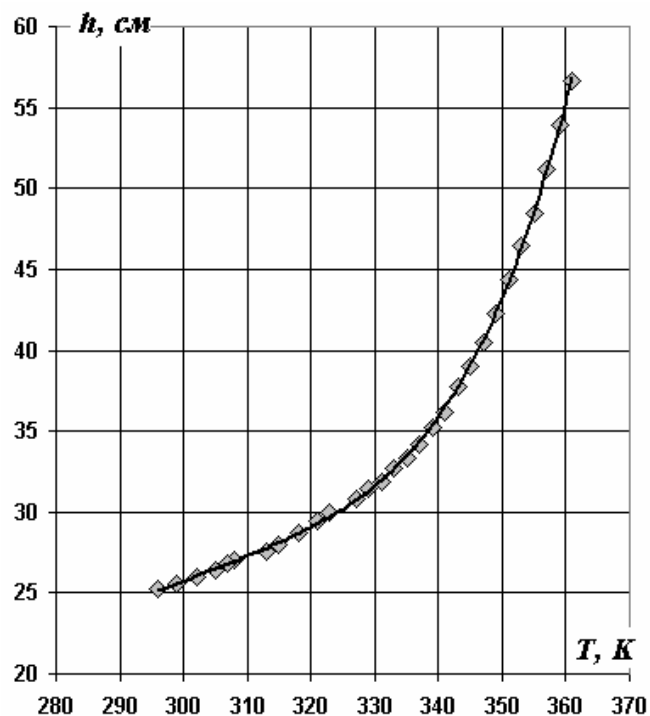


### Задача 48. «Насыщенный пар»

Зависимость высоты столба газа в трубке от температуры представлена в таблице 1 и на графике (в последнем столбце даны значения высоты уровня воды в широкой трубке).

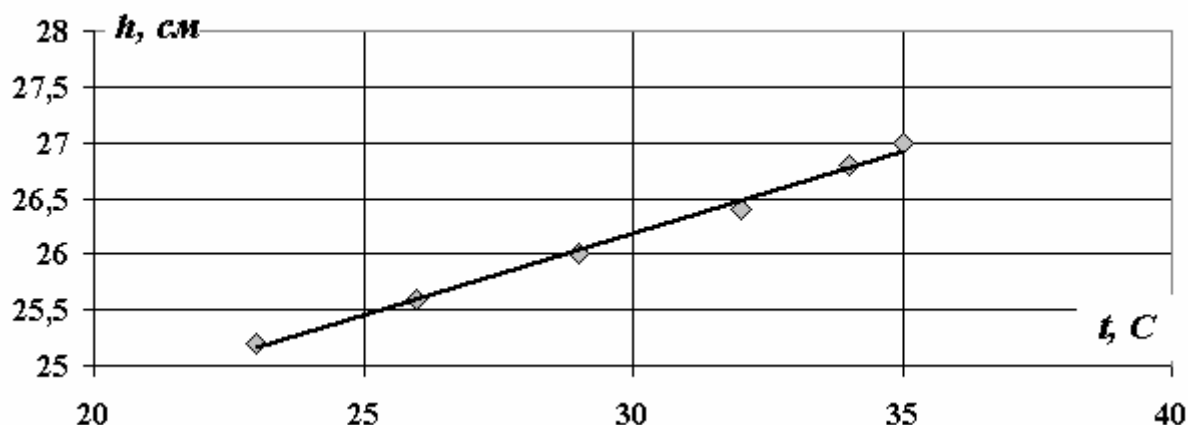
Таблица 1.

| $t, ^\circ\text{C}$ | $T, \text{K}$ | $h, \text{см}$ | $H, \text{см}$ |
|---------------------|---------------|----------------|----------------|
| 88                  | 361           | 56,6           | 4,8            |
| 86                  | 359           | 53,9           | 5              |
| 84                  | 357           | 51,2           | 5,4            |
| 82                  | 355           | 48,5           | 5,7            |
| 80                  | 353           | 46,5           | 6,1            |
| 78                  | 351           | 44,4           | 6,4            |
| 76                  | 349           | 42,3           | 6,7            |
| 74                  | 347           | 40,5           | 7              |
| 72                  | 345           | 39             | 7,2            |
| 70                  | 343           | 37,7           | 7,5            |
| 68                  | 341           | 36,2           | 7,8            |
| 66                  | 339           | 35,2           | 8              |
| 64                  | 337           | 34,2           | 8,1            |
| 62                  | 335           | 33,3           | 8,2            |
| 60                  | 333           | 32,7           | 8,4            |
| 58                  | 331           | 31,9           | 8,5            |
| 56                  | 329           | 31,4           | 8,6            |
| 54                  | 327           | 30,8           | 8,7            |
| 50                  | 323           | 30             | 1,2            |
| 48                  | 321           | 29,5           | 1,3            |
| 45                  | 318           | 28,7           | 1,5            |
| 42                  | 315           | 28             | 1,6            |
| 40                  | 313           | 27,6           | 1,8            |
| 35                  | 308           | 27             | 4,2            |
| 34                  | 307           | 26,8           | 4,1            |
| 32                  | 305           | 26,4           | 3,8            |
| 29                  | 302           | 26             | 4,8            |
| 26                  | 299           | 25,6           | 5,8            |
| 23                  | 296           | 25,2           | 5,6            |



Прекрасно видно, что данная зависимость не линейна, следовательно, влияние давления насыщенных паров воды в трубке существенно. Заметим, что во всех случаях можно пренебречь гидростатическим давлением столба воды по сравнению с атмосферным давлением.

2. В указанном диапазоне «низких» температур данная зависимость близка к линейной.



Поэтому, если не учитывать влияние паров, то зависимость объема воздуха от температуры описывается уравнением

$$h = h_0(1 + \alpha t). \quad (1)$$

Тогда значение абсолютного нуля температур оценивается как  $t_0 = -\alpha^{-1}$ . По данным измерений это значение равно  $t_0 = -\alpha^{-1} \approx -145^\circ\text{C}$ , что весьма далеко от табличного значения. Следовательно, и в этом диапазоне давление паров воды существенно.

3. Для проверки справедливости уравнения Клапейрона-Клаузиуса необходимо из общего давления газов в трубке вычесть давление сухого воздуха. Сухой воздух подчиняется уравнению состояния идеального газа, поэтому для него можно записать

$$\frac{Ph}{T} = \frac{P_0 h_0}{T_0} \quad (2)$$

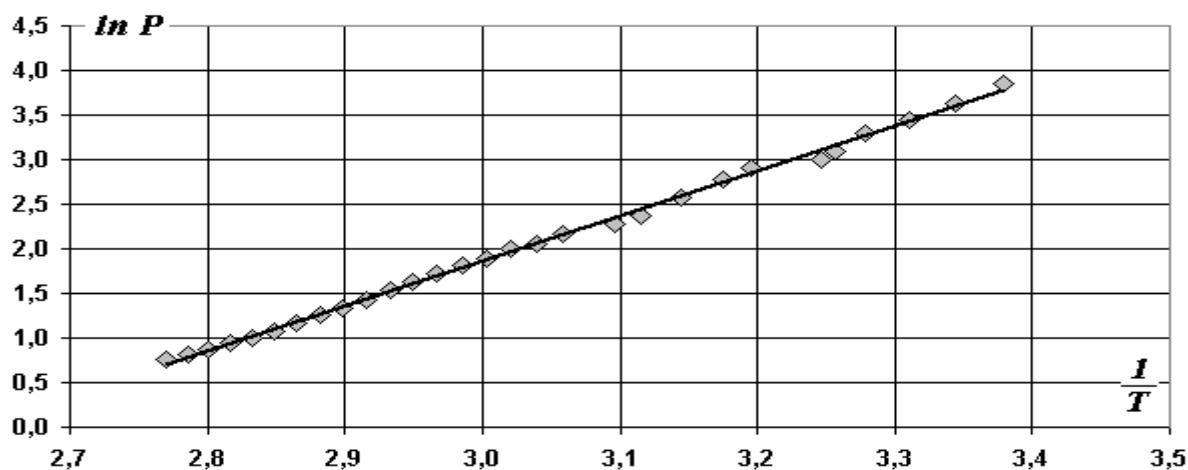
где  $h_0$  высота столба, которого бы занимал сухой воздух при температуре  $T_0$ . По прежнему, полагая атмосферное давление значительно большим гидростатического, можно записать

$$P_0 = P_0 \frac{h_0}{T_0} \frac{T}{h} + P_{\text{пара}}, \quad (3)$$

Откуда следует, что давление водяного пара можно рассчитать по формуле

$$P_{\text{пара}} = P_0 \left( 1 - \frac{h_0}{T_0} \frac{T}{h} \right), \quad (4)$$

Расчет давления водяного пара по этой формуле приводит к следующему графику логарифма давления водяного пара от величины, обратной абсолютной температуре (что требует уравнение Клапейрона – Клаузиуса).



Этот график подтверждает справедливость данного уравнения и доказывает, что в данном эксперименте действительно основной вклад вносит давление насыщенного пара. Найденное по данной зависимости значение удельной теплоты испарения воды

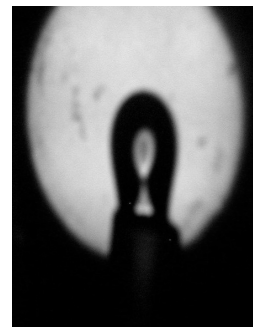
$$q = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{дж}}{\text{кг}},$$

очень близко к табличному значению.



#### Задача 49. «Изучение капель»

**Часть 1.** Определение фокусного расстояния линзы является традиционной задачей, к тому же рассмотренной нами ранее. Не вызывает сомнения также возможность получение четкого изображения капли с десятикратным увеличением с помощью собирающей линзы. Для примера, приведем пример такого изображения висящей капли (очевидно, что изображение перевернуто).



Вторая и третья части работы носят почти качественный характер. Получение точных зависимостей затруднительно, поэтому решением задачи следует считать получение зависимостей, правильно отражающих имеющиеся закономерности. Так высота капли лежащей на не смачиваемой поверхности при малых размерах капли практически равна ее диаметру, при увеличении размера капли ее высота стремится к предельному значению. Это предельное значение высоты капли  $\tilde{d}$  может быть оценено из условия равенства лапласовского и гидростатического давлений:

$$\frac{4\sigma}{\tilde{d}} \approx \rho g \tilde{d}, \Rightarrow \tilde{d} \approx \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho g}} \approx 2,5 \text{ мм} . \quad (1)$$

Эта же формула может применяться и для оценки поверхностного натяжения  $\sigma$ . Для определения поверхностного натяжения с помощью висящей капли следует получить и зарисовать ее изображение. Затем определить диаметр самой узкой части (перетяжки)  $D_{\min}$ , а также численно вычислить ее объем (по зарисованному профилю)  $V$ . Условие равенства силы тяжести и силы поверхностного натяжения на перетяжке позволяет оценить поверхностное натяжение

$$\pi D_{\min} \sigma = \rho V g \Rightarrow \sigma = \frac{\rho V g}{\pi D_{\min}} . \quad (2)$$



### Задача 50. «Исследование поверхностного натяжения спиртовых растворов»

Для измерения поверхностного натяжения следует использовать капиллярную стеклянную трубку. Погружая ее исследуемый раствор, а затем вынимая, по высоте столбика жидкости, оставшейся в трубке можно определить коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ .

Действительно, условие равновесия жидкости в трубке имеет вид

$$\frac{4\sigma}{r} = \rho gh, \quad (1)$$

где  $\rho$  - плотность жидкости;  $r$  - радиус капилляра. Из этого условия следует формула определения коэффициента поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{rg}{4} \rho h.$$

Строго говоря, эта формула не учитывает краевые углы, образуемые жидкостью с внутренними стенками трубки и с ее нижним основанием. Поэтому измерения зависимости поверхностного натяжения от концентрации следует проводить относительно чистой воды.

Обозначим  $\rho_0, \sigma_0$  - плотность и коэффициент поверхностного натяжения чистой воды;  $h_0$  - высоту уровня чистой воды в трубке, тогда коэффициент поверхностного натяжения раствора следует рассчитывать по формуле

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\rho h}{\rho_0 h_0}. \quad (2)$$

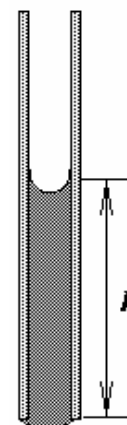
В ходе измерений следует учесть, что плотность раствора зависит от его концентрации. Приготовить раствор известной концентрации можно следующим образом: с помощью стеклянной трубки легко отмерять одинаковые объемы (капли) жидкостей. Если раствор приготовлен из  $n_0$  капель воды и  $n_1$  капель спирта, то объемная относительная концентрация спирта  $c$  и плотность раствора  $\rho$  определяется формулами

$$c = \frac{n_1}{n_0 + n_1}, \quad \rho = \frac{\rho_0 n_0 + \rho_1 n_1}{n_0 + n_1}. \quad (4)$$

Так как случайная погрешность измерения высоты столбика жидкости в капилляре существенна, то необходимо проводить эти измерения несколько раз. Результаты измерений представлены в таблице и на графике.

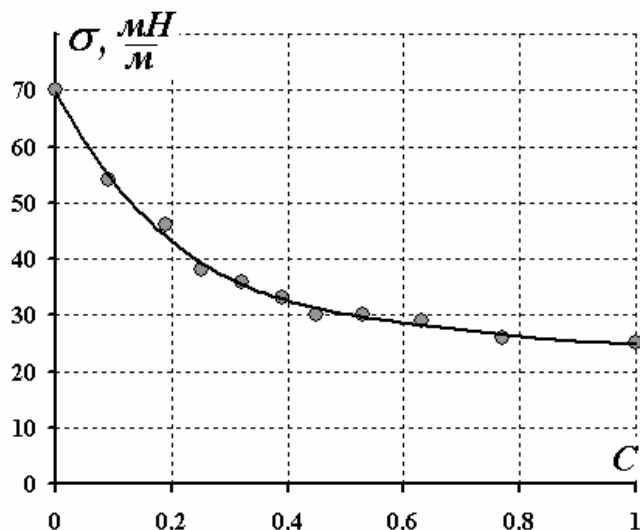
**Таблица.**

| $n_0$ | $n_1$ | $c$  | $\rho, \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ | $h_1, \text{мм}$ | $h_2, \text{мм}$ | $h_3, \text{мм}$ | $\bar{h}, \text{мм}$ | $\sigma, \frac{\text{мН}}{\text{м}}$ |
|-------|-------|------|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|----------------------|--------------------------------------|
| 30    | 3     | 0,09 | 0,991                                | 35               | 35               | 35               | 35                   | 54                                   |
| 30    | 7     | 0,19 | 0,981                                | 30               | 29               | 30               | 30                   | 46                                   |
| 30    | 10    | 0,25 | 0,975                                | 25               | 25               | 25               | 25                   | 38                                   |
| 30    | 14    | 0,32 | 0,968                                | 25               | 24               | 25               | 25                   | 36                                   |
| 30    | 19    | 0,39 | 0,961                                | 22               | 22               | 21               | 22                   | 33                                   |
| 30    | 25    | 0,45 | 0,954                                | 20               | 19               | 21               | 20                   | 30                                   |
| 27    | 30    | 0,53 | 0,947                                | 22               | 20               | 20               | 21                   | 30                                   |
| 18    | 30    | 0,63 | 0,937                                | 20               | 19               | 20               | 20                   | 29                                   |
| 9     | 30    | 0,77 | 0,923                                | 18               | 19               | 18               | 18                   | 26                                   |
| 0     | 30    | 1,0  | 0,90                                 | 16               | 16               | 16               | 16                   | 25                                   |



По данным таблицы построим график зависимости коэффициента поверхностного натяжения раствора от концентрации спирта.

Как видно, эта зависимость нелинейная, при малых концентрациях коэффициент поверхностного натяжения достаточно быстро падает, а при концентрациях больших 50% поверхностное натяжение изменяется гораздо медленнее.



## Часть 2. Определение вида зависимости.

Экспериментатор подает теоретiku экспериментальный график: «Не могли бы Вы объяснить полученную зависимость?»

Теоретик: «Ну... эта зависимость понятна, она может быть объяснена следующим образом ...»

Экспериментатор: «Извините, Вы держите график верх ногами!»

Теоретик (перевернув график): «Тогда это тем более понятно!»

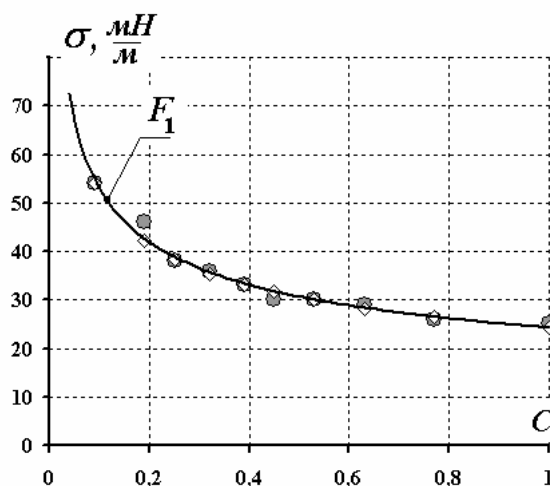
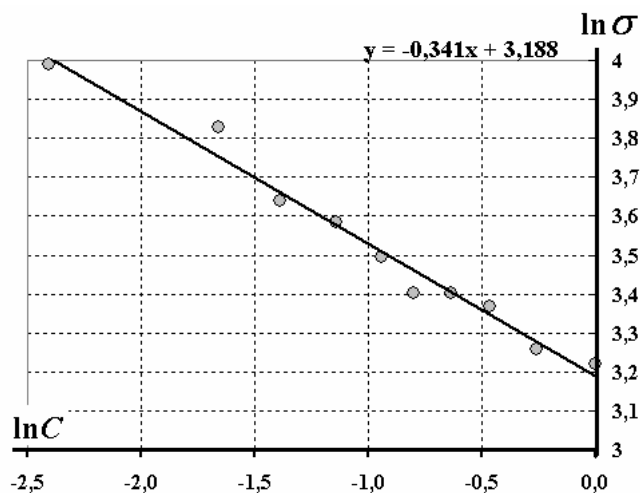
*Научный фольклор.*

Подбор эмпирической зависимости, как мы уже неоднократно убеждались, не совсем корректная операция, потому как она может быть построена различными способами. Покажем это еще один раз, еще раз «наступим на эти грабли».

Первое. Попробуем аппроксимировать полученную зависимость степенной функцией

$$\sigma = A \cdot c^{\alpha} . \quad (5)$$

Поступаем традиционным образом: строим график в логарифмическом масштабе и по МНК определяем его параметры.



Удивительно, но показатель степени оказывается равным  $\alpha \approx -0,341$ , что очень близко к  $\alpha \approx -\frac{1}{3}$ , иными словами, поверхностное натяжение обратно пропорционально кубическому корню из концентрации! Итак, первая аппроксимация имеет вид

$$\sigma = F_1(c) = \frac{A}{\sqrt[3]{c}}. \quad (6)$$

Возможно, кто-то из теоретиков сможет обосновать эту зависимость. Не смотря на то, что график этой функции проходит достаточно близко к экспериментальным точкам, у этой функции есть один существенный недостаток – при концентрации спирта стремящейся к нулю (то есть для чистой воды) поверхностное натяжение стремится к бесконечности!

Попробуем подобрать такую аппроксимирующую функцию, чтобы при  $c = 0$  поверхностное натяжение было равно поверхностному натяжению воды  $\sigma = \sigma_0$ , а с ростом концентрации монотонно уменьшалось. Этим условиям удовлетворяет функция вида

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + Bc^\beta}, \quad (7)$$

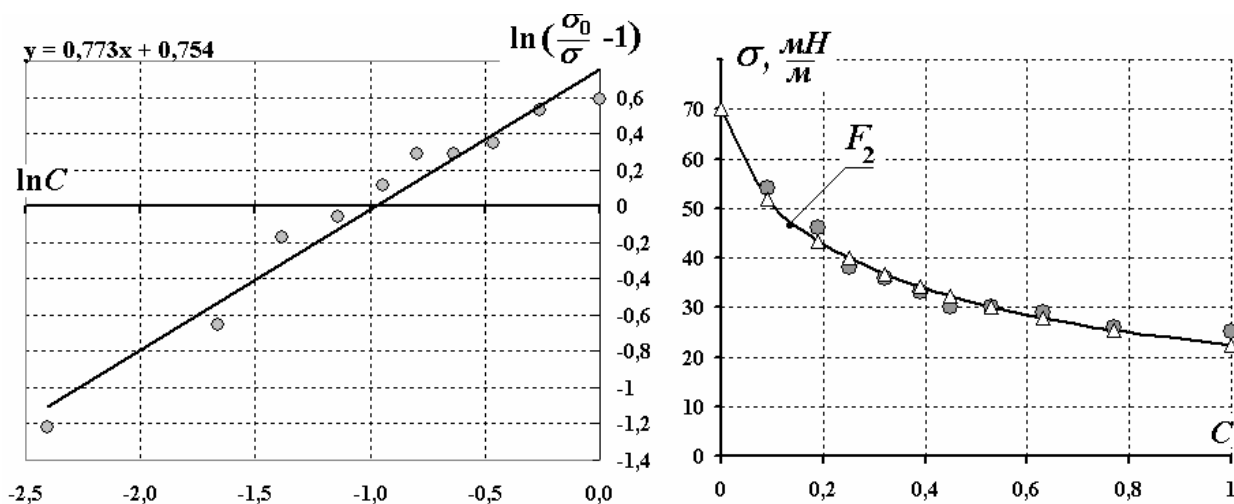
где  $B$  и  $\beta$  - параметры, подлежащие определению. Для их нахождения можно также воспользоваться МНК, линеаризовав функцию (7) следующим образом

$$\ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma} - 1\right) = \beta \ln c + \ln B.$$

Расчет параметров также приводит к «интересному» результату (достойному внимания теоретиков): показатель степени близок  $\beta \approx 0,773 \approx \frac{3}{4}$ . График полученной функции

$$\sigma = F_2(c) = \frac{\sigma_0}{1 + B\sqrt[4]{c^3}} \quad (8)$$

также неплохо описывает экспериментальные данные, особенно при  $c = 0$ , здесь он абсолютно точен!



А если попробовать подобрать функцию, которая при  $c = 0$  (чистая вода) равна поверхностному натяжению воды  $\sigma_0$ , а при  $c = 1$  (чистый спирт) поверхностному натяжению спирта  $\sigma_1$ ? Можно оставить функцию вида (7), в которой параметр  $B$  определить нужным образом:

$$\sigma = F_3(c) = \frac{\sigma_0}{1 + \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1 \right) c^\gamma} \quad (9)$$

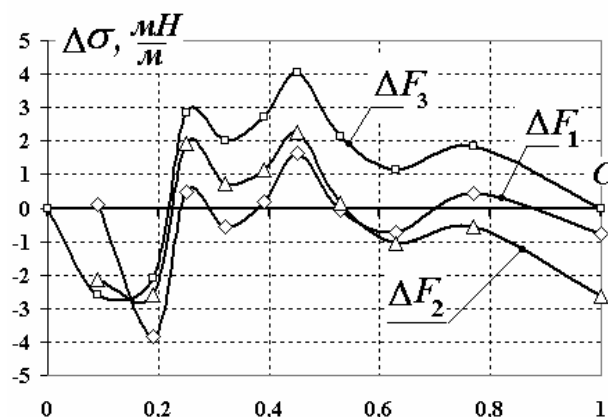
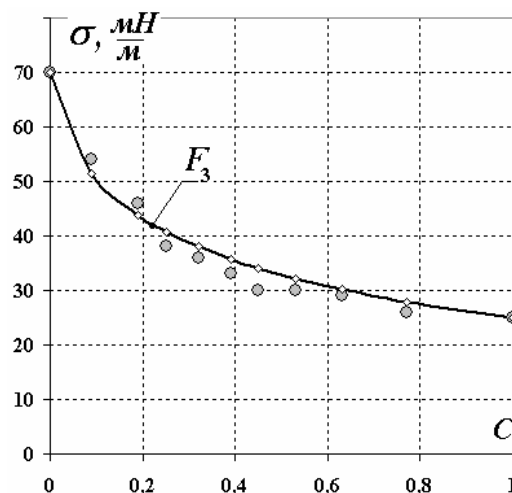
Теперь необходимо подобрать единственный параметр  $\gamma$ , так чтобы сумма квадратов отклонений теоретических и экспериментальных значений была минимальна. Поразительно, но и в этом случае показатель степени может удовлетворить теоретиков – оказывается примерно равным  $\gamma \approx \frac{2}{3}$ . Полученная функция также неплохо описывает экспериментальные данные.

Может, имеет смысл приписать величине  $c^{\frac{2}{3}}$  смысл «поверхностной концентрации»? В этом случае формула (9) приобретает очень «теоретический» вид:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1 - c^{\frac{2}{3}}}{\sigma_0} + \frac{c^{\frac{2}{3}}}{\sigma_1}, \quad (10)$$

величина обратная поверхностному натяжению раствора равна средневзвешенному от этих величин компонентов раствора, причем в качестве весов выступают «поверхностные концентрации». Вот уж действительно глубочайший клад теоретических моделей!

Поднимемся, однако, на твердую почву экспериментальных данных, и зададимся вопросом: какая из функций (6), (8), или (10) лучше описывает результаты измерений? Или следует придумать еще что-то? Построим графики зависимостей разности между теоретическими и экспериментальными значениями от концентрации раствора. Эти графики показывают, что, во-первых, для всех рассмотренных функций относительная погрешность не превышает 10%; во-вторых, поведение этих графиков примерно одинаково, что обусловлено погрешностями измерений, а не недостатками моделей. Поэтому ответ на поставленный вопрос очевиден: «Лучше та функция, которая вам больше нравится!»





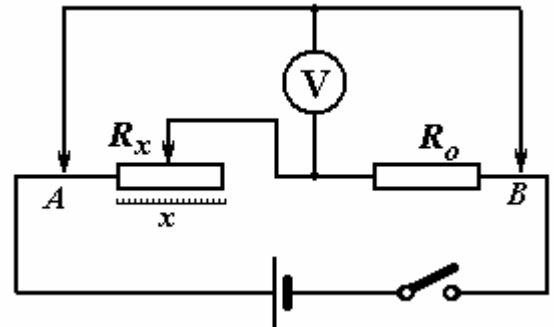


## Задача 51. «Параллельное соединение проводников»

### Часть 1. Градуировка реостата.

Конечно, лучше было бы иметь и амперметр, но хороший вольтметр в паре с резистором известного сопротивления прекрасно его заменяет, особенно, если его сопротивление равно 1 Ому!

Принципиальная электрическая схема, предназначенная для градуировки реостата, показана на рис. 1. Попеременно подключая вольтметр к точкам *A* и *B* можно измерить напряжения  $U_0$  на известном сопротивлении  $R_0 = 9\text{ Ом}$  и  $U_x$  на реостате  $R_x$  при задаваемом значении положения движка реостата  $x$ . При этом сопротивление реостата рассчитывается по формуле



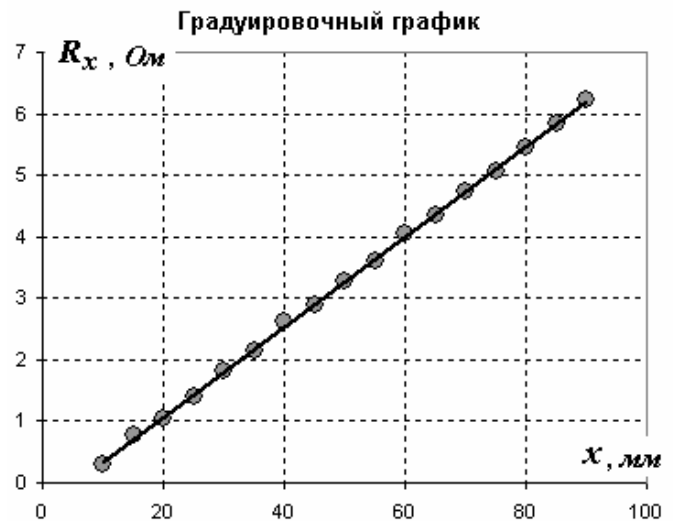
$$R_x = R_0 \frac{U_x}{U_0}. \quad (1)$$

Отметим, что при такой схеме нет необходимости в стабилизации напряжения источника.

Результаты измерений и рассчитанные значения сопротивления реостата даны в таблице 1. На рис. 2 показан градуировочный график: зависимость сопротивления реостата от положения движка.

**Таблица 1.**

| $x, \text{мм}$ | $U_x, \text{мВ}$ | $U_0, \text{мВ}$ | $R_x, \text{Ом}$ |
|----------------|------------------|------------------|------------------|
| 10             | 12               | 354              | 0,31             |
| 15             | 29               | 338              | 0,77             |
| 20             | 38               | 328              | 1,04             |
| 25             | 49               | 318              | 1,39             |
| 30             | 62               | 306              | 1,82             |
| 35             | 71               | 297              | 2,15             |
| 40             | 83               | 286              | 2,61             |
| 45             | 90               | 279              | 2,90             |
| 50             | 98               | 270              | 3,27             |
| 55             | 105              | 263              | 3,59             |
| 60             | 115              | 255              | 4,06             |
| 65             | 120              | 249              | 4,34             |
| 70             | 128              | 243              | 4,74             |
| 75             | 133              | 237              | 5,05             |
| 80             | 140              | 231              | 5,45             |
| 85             | 146              | 225              | 5,84             |
| 90             | 152              | 220              | 6,22             |



Как следует из полученных данных, зависимость линейная, но не прямо пропорциональная. Последнее связано с тем, что нуль шкалы не соответствует нулевому сопротивлению реостата. В дальнейшем для определения сопротивления реостата можно пользоваться этим градуировочным графиком, но предпочтительнее описать эту зависимость функционально. Так построенный график описывается линейной функцией

$$R_x = 0,073x - 0,37 \quad (2)$$

1.4 Коэффициент  $a$  в зависимости  $R_x = ax + b$  является сопротивлением единицы длины обмотки реостата. С помощью полоски миллиметровой бумаги легко измерить длину части обмотки  $z$ , состоящей из  $n$  прилегающих витков, и длину одного витка  $l_0$ .

Сопротивление этого участка реостата, рассчитанное по известной формуле для сопротивления проводника, равно

$$R = \rho \frac{nl_0}{\pi d^2/4} = \rho \frac{4nl_0}{\pi \left(\frac{z}{n}\right)^2}.$$

С другой стороны, это же сопротивление равно  $R = az$ . Приравняв эти два выражения, получим расчетную формулу для удельного сопротивления

$$\rho \frac{4nl_0}{\pi \left(\frac{z}{n}\right)^2} = az \Rightarrow \rho = a \left(\frac{z}{n}\right)^3 \frac{\pi}{4nl_0} \quad (2)$$

Погрешность определения удельного сопротивления рассчитывается по формуле

$$\Delta\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(3\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)^2} \quad (3)$$

По нашим измерениям:

$$a = (72,8 \pm 1,1) \frac{\text{Ом}}{\text{м}} \quad (\text{рассчитано по МНК, начиная с } x = 30 \text{ мм});$$

## Часть 2. Неизвестное сопротивление.

Измерение сопротивления параллельно соединенных реостата и резистора следует проводить по прежней методике. Результаты измерений напряжений  $U_0, U_x$ , а также расчетов общего сопротивления реостата и неизвестного резистора  $R_{об.}$ , сопротивления реостата  $R_x$  при различных положениях движка реостата  $x$  приведены в таблице 2.

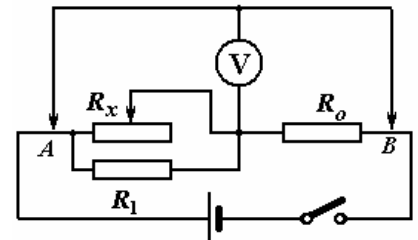


Таблица 2.

| $x, \text{ мм}$ | $U_x, \text{ мВ}$ | $U_0, \text{ мВ}$ | $R_{об.}, \text{ Ом}$ | $R_x, \text{ Ом}$ | $R_{об.}^{-1}, \text{ Ом}^{-1}$ | $R_x^{-1}, \text{ Ом}^{-1}$ |
|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| 30              | 58                | 298               | 1,752                 | 1,818             | <b>0,571</b>                    | <b>0,550</b>                |
| 35              | 67                | 289               | 2,087                 | 2,183             | <b>0,479</b>                    | <b>0,458</b>                |
| 40              | 75                | 282               | 2,394                 | 2,547             | <b>0,418</b>                    | <b>0,393</b>                |
| 45              | 83                | 275               | 2,716                 | 2,912             | <b>0,368</b>                    | <b>0,343</b>                |
| 50              | 89                | 269               | 2,978                 | 3,276             | <b>0,336</b>                    | <b>0,305</b>                |
| 55              | 96                | 263               | 3,285                 | 3,641             | <b>0,304</b>                    | <b>0,275</b>                |
| 60              | 101               | 257               | 3,537                 | 4,005             | <b>0,283</b>                    | <b>0,250</b>                |
| 65              | 108               | 251               | 3,873                 | 4,370             | <b>0,258</b>                    | <b>0,229</b>                |
| 70              | 113               | 247               | 4,117                 | 4,734             | <b>0,243</b>                    | <b>0,211</b>                |
| 75              | 118               | 243               | 4,370                 | 5,099             | <b>0,229</b>                    | <b>0,196</b>                |
| 80              | 123               | 238               | 4,651                 | 5,463             | <b>0,215</b>                    | <b>0,183</b>                |
| 85              | 128               | 234               | 4,923                 | 5,828             | <b>0,203</b>                    | <b>0,172</b>                |
| 90              | 132               | 230               | 5,165                 | 6,192             | <b>0,194</b>                    | <b>0,161</b>                |

График<sup>9</sup> зависимости общего сопротивления пары (реостат - неизвестный резистор) от сопротивления реостата (рис. 4) не позволяет судить о справедливости формулы для общего сопротивления параллельно соединенных резисторов

$$\frac{1}{R_{об}} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_1}. \quad (4)$$

Поэтому для проверки применимости данной формулы следует построить зависимость величин, обратных сопротивлениям:  $R_{об}^{-1}$  от  $R_x^{-1}$ . Расчет эти величин представлен в последних столбцах таблицы 2, а график показан на рис.5.

Практически строгая линейная зависимость, с коэффициентом наклона, близким к 1, подтверждает справедливость формулы (4).

Имеет смысл рассчитать коэффициенты этой зависимости по МНК:

$$A = 0,97 \pm 0,02;$$

$$B = (0,0385 \pm 0,0024) \text{ Ом}^{-1}$$

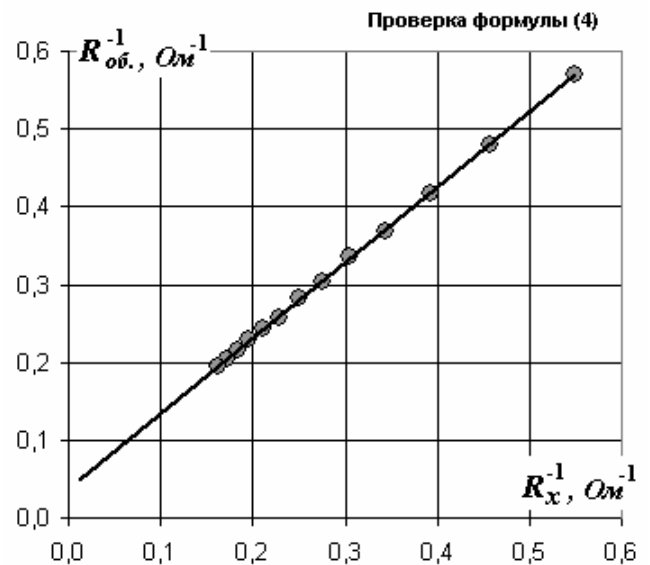
Первый коэффициент действительно очень близок к единице, а второй в соответствии с формулой (4) равен  $R_1^{-1}$ . Поэтому неизвестное сопротивление равно

$$R_1 = B^{-1} = 25,97 \text{ Ом},$$

с погрешностью

$$\Delta R_1 = R_1 \frac{\Delta B}{B} = 1,6 \text{ Ом}.$$

Окончательно получаем  $R_1 = (26,0 \pm 1,6) \text{ Ом}$ .



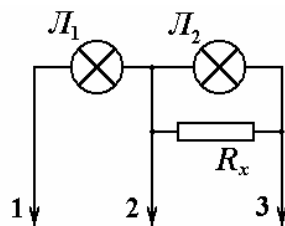
<sup>9</sup> По условию задачи его строить не требовалось!



## Задача 52. «Желтый ящик»

1. Самое поразительное в данном ящике, что при подключении батарейки к любым двум выводам, горит только одна лампочка. При подключении к выводам 1-3 вторая лампочка не светится потому, что силы тока не хватает, чтобы раскалить ее спираль – она шунтируется резистором.

Для определения соответствия между выводами необходимо объединять выводы и определять при каком подключении начинают светиться обе лампочки. Это произойдет, если батарейка подключена к выводам 2 и соединенным вместе 1 и 3. Таким образом, можно определить центральный вывод 2. Чтобы различить выводы 1 и 3 необходимо использовать амперметр – при подключении к батарейке выводов 2 и 3 сила тока будет больше, чем при подключении к выводам 1 и 2. Схема собрана таким образом, что «А»=2; «В»=1; «С»=3.



2. Реально провести измерения по предложенной схеме, только подключая к измерительному устройству выводы 2 и 3, в этом случае измеряется вольтамперная характеристика лампочки и параллельно подключенного резистора; а также 2 и соединенных выводов 1 и 3 – в этом случае измеряется вольтамперная характеристика параллельно соединенных двух лампочек и резистора. При подключении одной лампочки (выводы 1,2) изменения напряжения при размыкании ключа  $K_1$  незначительны (не более одного деления).

Расчеты необходимых величин проводятся по следующим формулам: Сопротивление части резистора, к которому подключается исследуемая цепь

$$R_1 = R_0 \frac{U_{10}}{U_{00}}, \quad (1)$$

сопротивление второй части

$$R_2 = R_0 - R_1. \quad (2)$$

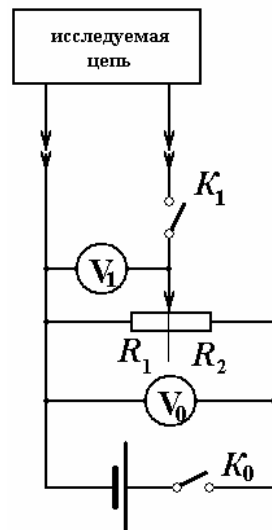
Сила тока в исследуемой цепи рассчитывается по формуле

$$I = \frac{V_0 - V_1}{R_2} - \frac{V_1}{R_1}. \quad (3)$$

Результаты измерений и расчетов при подключении выводов 2 и 3, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

| $U_1, B$ | $U_0, B$ | $U_{10}, B$ | $U_{00}, B$ | $R_1, Ом$ | $R_2, Ом$ | $I, A$ |
|----------|----------|-------------|-------------|-----------|-----------|--------|
| 0,40     | 4,00     | 0,55        | 4,00        | 0,89      | 5,61      | 0,19   |
| 0,60     | 4,00     | 0,85        | 4,00        | 1,38      | 5,12      | 0,23   |
| 0,80     | 4,00     | 1,20        | 4,00        | 1,95      | 4,55      | 0,29   |
| 1,00     | 4,00     | 1,60        | 4,00        | 2,60      | 3,90      | 0,38   |
| 1,20     | 4,00     | 1,90        | 4,00        | 3,09      | 3,41      | 0,43   |
| 1,40     | 4,00     | 2,15        | 4,00        | 3,49      | 3,01      | 0,46   |
| 1,60     | 4,00     | 2,45        | 4,00        | 3,98      | 2,52      | 0,55   |
| 1,80     | 3,95     | 2,70        | 4,00        | 4,39      | 2,11      | 0,61   |
| 2,00     | 3,85     | 2,95        | 4,00        | 4,79      | 1,71      | 0,67   |
| 2,20     | 3,50     | 3,30        | 4,00        | 5,36      | 1,14      | 0,73   |



При подключении выводов 2 и соединенных 1 и 3 получаются следующие результаты.

Таблица 2.

| $U_1, В$ | $U_0, В$ | $U_{10}, В$ | $U_{00}, В$ | $R_1, Ом$ | $R_2, Ом$ | $I, А$ |
|----------|----------|-------------|-------------|-----------|-----------|--------|
| 0,40     | 4,00     | 0,60        | 4,00        | 0,98      | 5,53      | 0,24   |
| 0,60     | 4,00     | 0,95        | 4,00        | 1,54      | 4,96      | 0,30   |
| 0,80     | 4,00     | 1,35        | 4,00        | 2,19      | 4,31      | 0,38   |
| 1,00     | 4,00     | 1,70        | 4,00        | 2,76      | 3,74      | 0,44   |
| 1,20     | 4,00     | 2,00        | 4,00        | 3,25      | 3,25      | 0,49   |
| 1,40     | 3,95     | 2,30        | 4,00        | 3,74      | 2,76      | 0,55   |
| 1,60     | 3,95     | 2,60        | 4,00        | 4,23      | 2,28      | 0,65   |
| 1,80     | 3,85     | 2,85        | 4,00        | 4,63      | 1,87      | 0,71   |
| 2,00     | 3,25     | 3,35        | 4,00        | 5,44      | 1,06      | 0,82   |

При заданном напряжении на входе исследуемой цепи силы токов определяются по формулам:

в первом случае

$$I_1 = I_{\text{лам.}} + I_R, \quad (4)$$

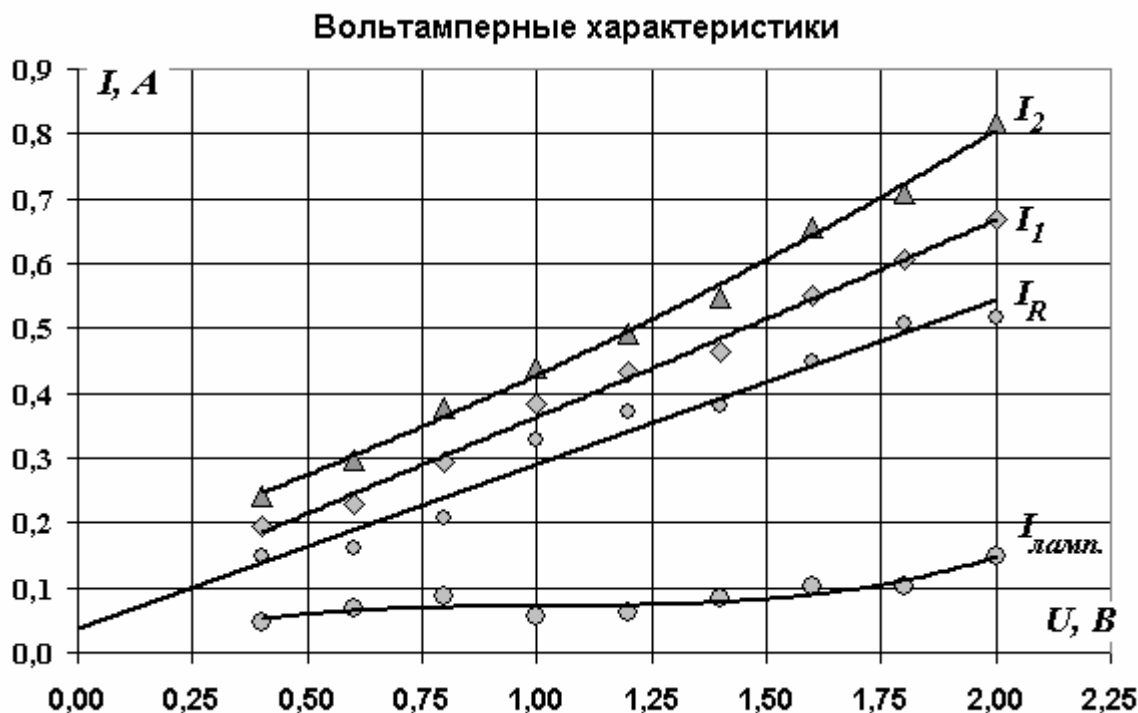
во втором

$$I_2 = 2I_{\text{лам.}} + I_R, \quad (5)$$

Из этих формул следует, что силы токов через лампочку и резистор могут быть пересчитаны следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{\text{лам.}} &= I_2 - I_1 \\ I_R &= 2I_1 - I_2 \end{aligned} \quad (6)$$

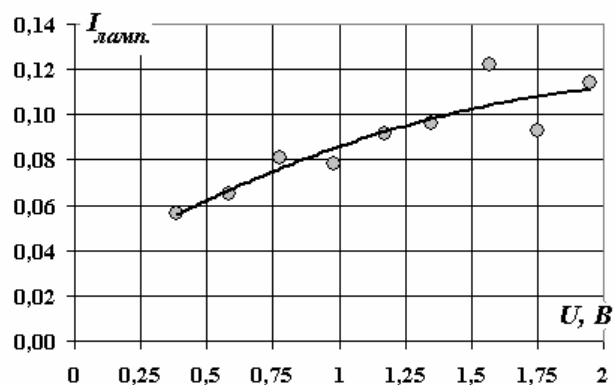
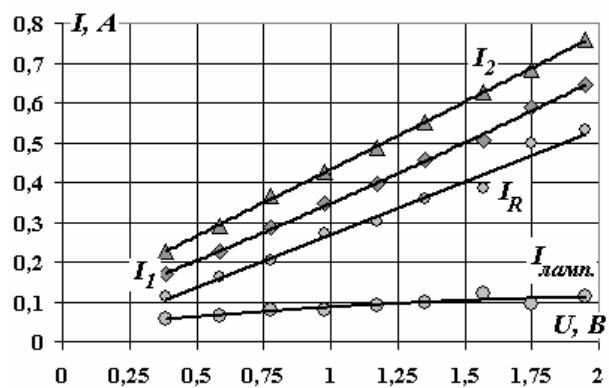
Результаты расчетов приведены на графиках.



Как видно точность измерений не высока, но, тем не менее, зависимость между токов и напряжением на резисторе может быть признана пропорциональной. По наклону графика определяется сопротивление резистора  $R = 3,9 Ом$ . Отметим, что точное значения сопротивления равно  $R = 3,6 Ом$ .

### Дополнение.

Точность измерений можно сделать существенно выше, используя для измерений цифровой мультиметр. Графики, построенные по измерениям с помощью мультиметра, показаны ниже.





### Задача 53. «Красный ящик»

Данная задача аналогична предыдущей. Сначала необходимо определить соответствие между выводами на схеме и на коробке. Для этого следует использовать свойство односторонней проводимости диода – если диод включается в цепь, то при изменении полярности источника изменяются значения силы тока.

Затем стандартным методом измеряется сопротивление резистора между выводами 1 и 2. После этого следует получить вольтамперные характеристики между выводами 1 и 3, и, внимание, между выводом 1 и соединенными выводами 2-3. Эти две характеристики позволяют выделить и построить вольтамперную характеристику диода. Она получается более нелинейной, чем у лампочки накаливания.



### Задача 54. «Вольтметр - гальванометр»

Первая часть задачи является традиционной (здесь вольтметр используется по своему прямому назначению). Отметим, что большинство полосковых реостатов имеют нелинейные характеристики – будьте внимательны.

В условии задачи оговорено, как проводить градуировку баллистического гальванометра (того же вольтметра). Заряжая конденсатор до известного напряжения (для этого была необходима первая часть работы) и разряжая его через вольтметр, можно построить зависимость отброса стрелки от заряда конденсатора. Данная зависимость оказывается близкой к линейной.

Первый вопрос третьей части, на первый взгляд кажется странным – конденсатор обладает емкостью, а не сопротивлением. Точнее, у идеального конденсатора сопротивление равно бесконечности. Но разве бывает реально, что-то идеальное? Заряженный конденсатор разряжается, следовательно, между его обкладками электрический ток все-таки протекает. Для выполнения данной части работы необходимо провести следующую серию экспериментов. Зарядить конденсатор до максимального напряжения и измерить его заряд (с помощью гальванометра) через известный промежуток времени. Затем повторить эти измерения для других промежутков времени. Тем самым можно построить зависимость заряда на конденсаторе от времени и по ней определить требуемое сопротивление, которое оказывается равным несколько десятков МОм.

В последней части работы между конденсатором и вольтметром следует подсоединить последовательно стержень и металлическую пластинку. В этом случае разряд конденсатора будет проходить только во время удара. Отметим, что за время удара утечкой заряда через конденсатор можно пренебречь. Вольтметр позволяет определить заряд, прошедший через него за время удара. Так как характеристики вольтметра и конденсатора известны, то на основании полученных данных не сложно оценить время удара.

Возможно и иная схема измерений – зарядить конденсатор, частично разрядить его, сделав несколько ударов, а затем измерить оставшийся заряд. Конечно, разброс значений достаточно велик, поэтому в условии ставится цель хотя бы оценить время удара. Проведенные измерения показывают, что время удара составляет величину меньшую, чем 1 миллисекунда.



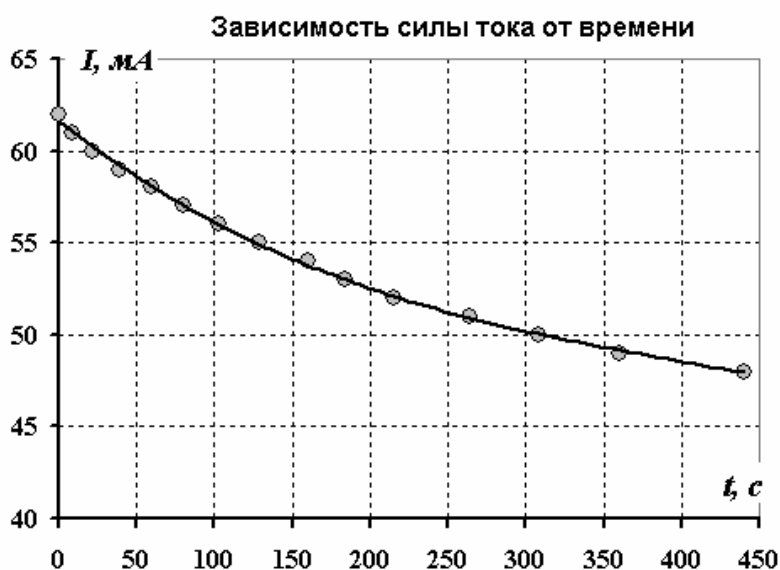
## Задача 55. «Гальванический лимон»

**Часть 1.** Так как сопротивление мультиметра значительно превышает внутреннее сопротивление «фруктового» гальванического элемента, то для измерения ЭДС следует напрямую подключить мультиметр к элементу, напряжение на нем с высокой точностью совпадает с ЭДС источника. При использовании медной и цинковой пластинок ЭДС оказывается равной примерно 1 В и практически не зависит от используемого фрукта. Известно, что ЭДС гальванического элемента определяется, главным образом, материалами электродов.

**Часть 2.** Для измерения силы тока нужно измерять напряжение на резисторе, который соединен последовательно с гальваническим элементом. Результаты зависимости силы тока  $I$  от времени  $t$  приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1.

| $t, c$ | $I, mA$ |
|--------|---------|
| 0      | 62      |
| 9      | 61      |
| 22     | 60      |
| 39     | 59      |
| 59     | 58      |
| 80     | 57      |
| 103    | 56      |
| 129    | 55      |
| 160    | 54      |
| 184    | 53      |
| 215    | 52      |
| 264    | 51      |
| 308    | 50      |
| 360    | 49      |
| 440    | 48      |

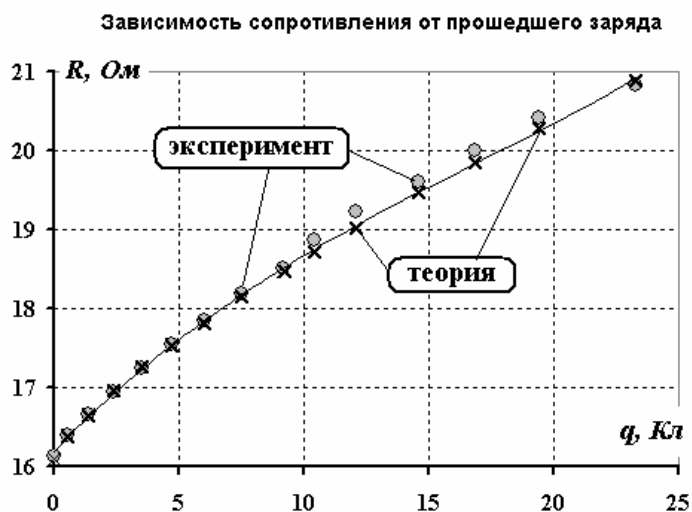


Как и следовало ожидать – с течением времени сила тока уменьшается (к сожалению, наш лимонный элемент работает не более 10 минут). Возможными причинами этого является окисление электродов и уменьшение концентрации ионов электролита.

По этим данным можно найти зависимость сопротивления элемента

( $R = \frac{U}{I}$ ) от электрического заряда,

прошедшего через элемент. Для вычисления этого заряда необходимо численно проинтегрировать зависимость силы тока от времени. Результаты расчетов показаны на следующем графике. Внутреннее сопротивление элемента возрастает по мере увеличения срока службы элемента. Полученная зависимость монотонно возрастающая, но не линейная. Подбором эмпирических





зависимостей мы занимались неоднократно, поэтому приведем, например, вот такую «простую» зависимость

$$R = R_0 + B \left( \frac{q}{F} \right)^{\frac{3}{4}},$$

где  $R_0 \approx 16 \text{ Ом}$  - начальное сопротивление,  $F = 9,6 \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$  - постоянная Фарадея,  $B \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ Ом}$ , коэффициент найденный методом подбора. Сравните – неплохое соответствие!



### Задача 56. «Двигатель и генератор»

Данная тема может быть предметом очень многих задач и темой для самостоятельной экспериментальной исследовательской работы. Результаты существенным образом зависят от используемого оборудования – вида двигателя, источника, механической системы.

Основные результаты кратко можно сформулировать следующим образом:

1. Сила тока при работающем двигателе практически полностью определяется массой подвешенного груза, то есть слабо зависит от приложенного напряжения и примерно пропорциональна массе поднимаемого груза.
2. Мощность двигателя можно определить, измеряя время подъема груза на заданную высоту. Тогда развиваемая полезная мощность равна произведению силы тяжести на скорость подъема. Затрачиваемая мощность равна произведению силы тока на приложенное напряжение.

Теоретической основой описания могут служить следующие уравнения:

Так как сила (или момент силы), развиваемая двигателем пропорциональна силе тока через обмотку (это следует из закона Ампера и постоянства магнитного поля статора), поэтому сила тока оказывается пропорциональной массе поднимаемого груза.

$$I = km. \quad (1)$$

Второе уравнение является уравнением закона сохранения энергии (записанное для мощностей)

$$IU = I^2 R + mgv, \quad (2)$$

здесь  $R$  - общее сопротивление цепи,  $v$  - скорость подъема груза.

Отметим, что кажущееся нарушение законов Ома в данном случае связано с появлением ЭДС индукции в обмотке двигателя при его работе.

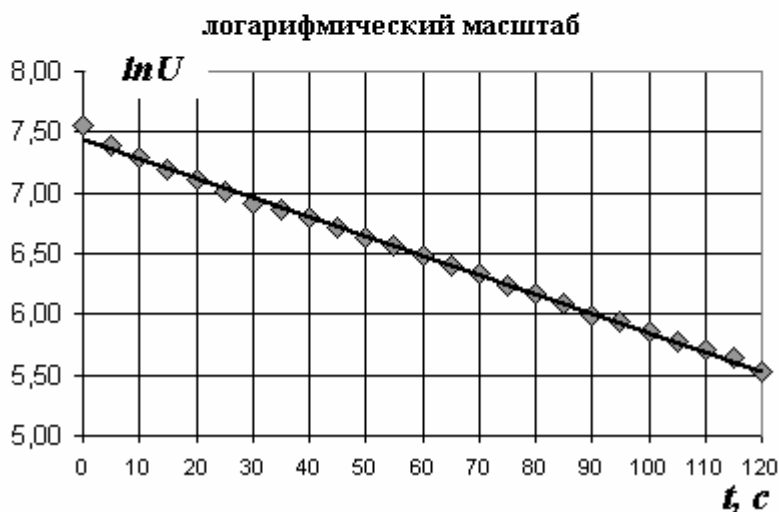
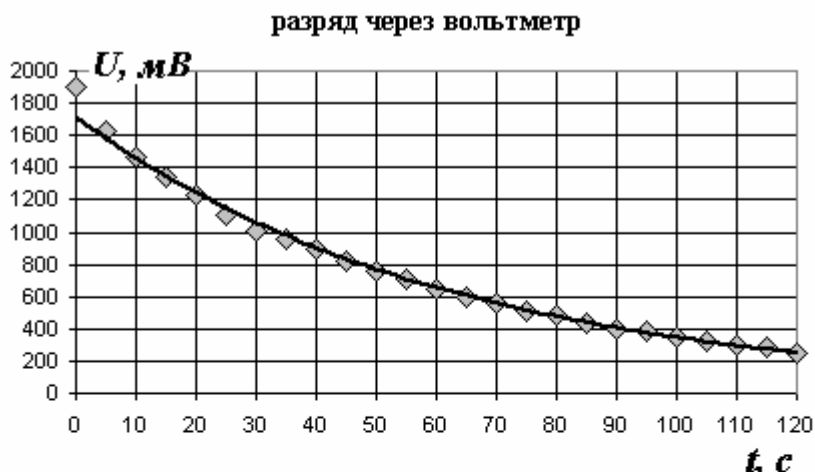


### Задача 56. «Закон электромагнитной индукции»

1. Измерение периода колебаний проводится обычным способом и дает значение  $T = 1,74 \text{ с}$ .
2. Зарядив конденсатор, проводим измерения зависимости силы напряжения от времени. Результаты измерений представлены в таблице 1 и на графиках (второй в логарифмическом масштабе).

Таблица 1.

| $t, \text{с}$ | $U, \text{мВ}$ | $\ln U$ |
|---------------|----------------|---------|
| 0             | 1900           | 7,55    |
| 5             | 1630           | 7,40    |
| 10            | 1470           | 7,29    |
| 15            | 1340           | 7,20    |
| 20            | 1230           | 7,11    |
| 25            | 1100           | 7,00    |
| 30            | 1010           | 6,92    |
| 35            | 960            | 6,87    |
| 40            | 890            | 6,79    |
| 45            | 820            | 6,71    |
| 50            | 760            | 6,63    |
| 55            | 710            | 6,57    |
| 60            | 650            | 6,48    |
| 65            | 600            | 6,40    |
| 70            | 560            | 6,33    |
| 75            | 510            | 6,23    |
| 80            | 480            | 6,17    |
| 85            | 440            | 6,09    |
| 90            | 400            | 5,99    |
| 95            | 380            | 5,94    |
| 100           | 350            | 5,86    |
| 105           | 320            | 5,77    |
| 110           | 300            | 5,70    |
| 115           | 280            | 5,63    |
| 120           | 250            | 5,52    |



Определенное по методу наименьших квадратов значение времени разрядки равно

$$\tau = (62,4 \pm 1,5) \text{ с} . \quad (1)$$

Сопротивление мультиметра рассчитывается по формуле

$$R_v = \frac{\tau}{C} = (1,25 \pm 0,05) \text{ МОм} . \quad (2)$$

**Примечание.**

Время разрядки может быть определено и без использования логарифмического масштаба (все-таки 10 класс). Для этого можно построить зависимость скорости изменения напряжения  $\frac{\Delta U}{\Delta t}$  от напряжения на конденсаторе. Эта зависимость описывается приближенным уравнением

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau}U$$

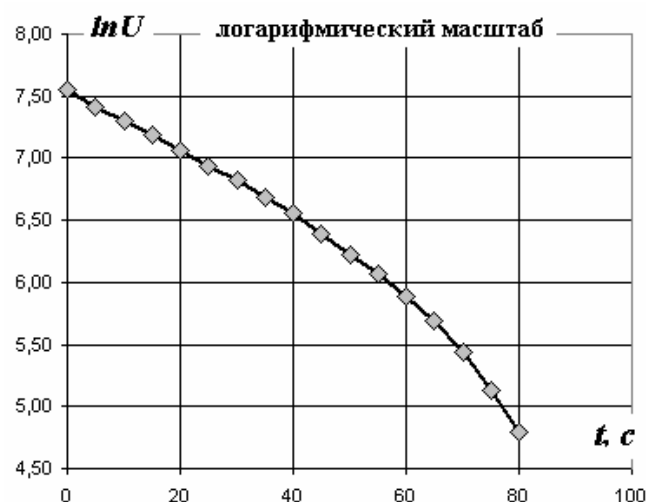
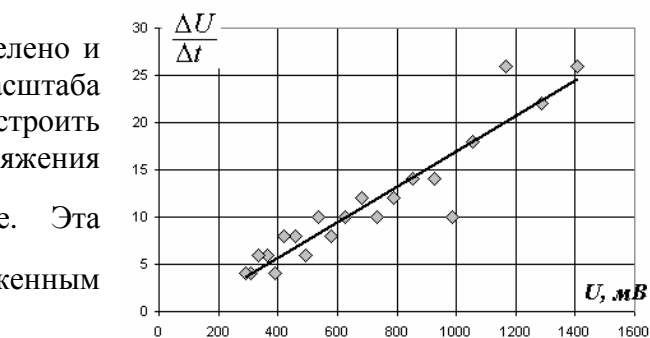
(3)

и является линейной. Значение времени, определенное по этой зависимости оказывается равным  $\tau \approx 55\text{ с}$  с существенно большей погрешностью.

3. Измерения временной зависимости напряжения на конденсаторе при его разрядке через диод и катушку телефона проводятся аналогично, результаты этих измерений приведены в таблице 2 и на графике.

**Таблица 2.**

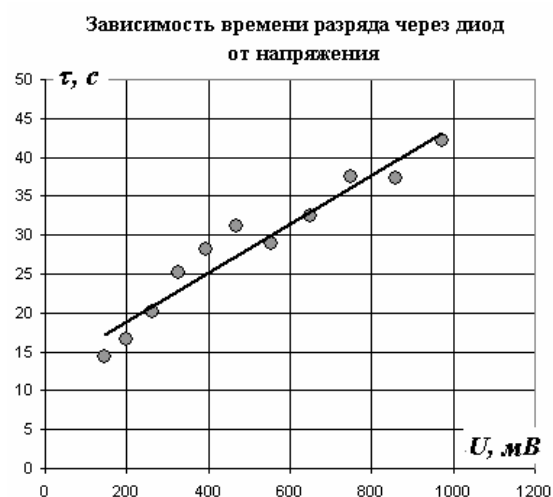
| $t, \text{с}$ | $U, \text{мВ}$ | $\ln U$ | $\tau, \text{с}$ |
|---------------|----------------|---------|------------------|
| 0             | 1900           | 7,55    |                  |
| 5             | 1660           | 7,41    | 37,0             |
| 10            | 1470           | 7,29    | 41,1             |
| 15            | 1330           | 7,19    | 50,0             |
| 20            | 1170           | 7,06    | 39,0             |
| 25            | 1030           | 6,94    | 39,2             |
| 30            | 915            | 6,82    | 42,2             |
| 35            | 800            | 6,68    | 37,2             |
| 40            | 700            | 6,55    | 37,4             |
| 45            | 600            | 6,40    | 32,4             |
| 50            | 505            | 6,22    | 29,0             |
| 55            | 430            | 6,06    | 31,1             |
| 60            | 360            | 5,89    | 28,1             |
| 65            | 295            | 5,69    | 25,1             |
| 70            | 230            | 5,44    | 20,1             |
| 75            | 170            | 5,14    | 16,5             |
| 80            | 120            | 4,79    | 14,4             |



Хорошо заметно, что сопротивление диода (следовательно, и время разряда) не является постоянным, а зависит от приложенного напряжения. Поэтому следует построить зависимость времени разрядки от напряжения на конденсаторе. Эта зависимость может быть рассчитана на основании уравнения (3), из которого следует, что

$$\tau = -U \frac{\Delta t}{\Delta U}.$$

График этой зависимости показан на рисунке. Отметим, что и в этом случае время разрядки (около 30 с) значительно превышает период колебаний.



4. Результаты измерений зависимости максимального напряжения на конденсаторе от амплитуды колебаний приведены в таблице 3 и на графике.

**Таблица 3.**

|                           |       |       |       |       |       |       |       |      |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| <b>A, см</b>              | 40    | 35    | 30    | 25    | 20    | 15    | 10    | 5    |
| <b>U<sub>1</sub>, мВ</b>  | 480   | 430   | 381   | 325   | 261   | 167   | 119   | 45   |
| <b>U<sub>2</sub>, мВ</b>  | 485   | 427   | 380   | 326   | 252   | 164   | 123   | 49   |
| <b>U<sub>3</sub>, мВ</b>  | 482   | 424   | 373   | 329   | 254   | 169   | 120   | 53   |
| <b>U<sub>ср</sub>, мВ</b> | 482,3 | 427,0 | 378,0 | 326,7 | 255,7 | 166,7 | 120,7 | 49,0 |

Полученная зависимость близка к линейной.

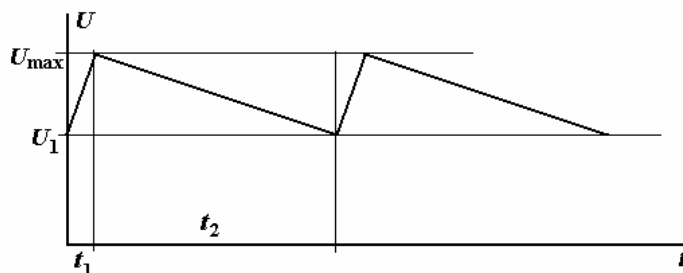


5. При прохождении магнита над катушкой в ней индуцируется ЭДС, величина которой определяется законом М. Фарадея

$$|E| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (4)$$

Эта ЭДС подзаряжает конденсатор, который разряжается в тот промежуток времени, когда магнит не проходит над катушкой.

Схематическая зависимость напряжения на конденсаторе от времени показана на рисунке. В течение промежутка времени  $t_1$  (магнит проходит над катушкой) напряжение на конденсаторе возрастает от некоторого значения  $U_1$  до максимального  $U_{\max}$ . Процесс зарядки описывается уравнением



$$C \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{E - U}{R} = \frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} - \frac{U}{R}. \quad (5)$$

Учитывая малость времени  $t_1$  по сравнению со временем разрядки, можно записать

$$U_{\max} = U_1 + \frac{\Phi_0}{R_0 C} - \frac{U_1}{R_0 C} t_1 \quad (6)$$

Здесь в качестве сопротивления цепи следует брать сопротивление катушки, так как во время зарядки диод открыт, и его сопротивлением можно пренебречь. Величина

$$R_0 C = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Ом} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ с}, \quad (7)$$

больше чем время прохождения магнита над катушкой (которое меньше, чем одна сотая периода колебаний).

За промежуток времени  $t_2 \approx \frac{T}{2}$  примерно равный половине периода колебаний конденсатор разряжается через закрытый диод. Процесс разрядки описывается уравнением

$$C \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{U}{R}, \quad (8)$$

из которого можно получить приближенное соотношение

$$U_1 = U_{\max} \left( 1 - \frac{t_2}{RC} \right). \quad (9)$$

Из формул (6)-(9) следует

$$U_{\max} = \frac{\Phi_0}{R_0 C} \left( \frac{t_1}{R_0 C} + \frac{t_2}{RC} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Определим время прохождения магнита над катушкой (точнее над половиной катушки) из закона движения маятника. Так как размер катушки и магнита значительно меньше амплитуды колебаний, то это время оценивается формулой

$$t_1 = \frac{\Delta l}{v_{\max}}, \quad (11)$$

где  $\Delta l$  сумма диаметра магнита радиуса катушки (в наших экспериментах  $\Delta l \approx 3 \text{ см}$ ), а максимальная скорость может быть найдена из закона сохранения энергии

$$\frac{v_{\max}^2}{2} = \frac{\omega^2 A^2}{2}, \quad (12)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  - круговая частота колебаний маятника. Таким образом, мы получаем,

$$t_1 = \frac{\Delta l}{v_{\max}} = \frac{T}{2\pi} \frac{\Delta l}{A}. \quad (13)$$

Оценим численные значения слагаемых в формуле (10)

$$\frac{t_1}{R_0 C} \approx \frac{T}{2\pi} \frac{\Delta l}{A} \frac{1}{R_0 C} \approx 0,5,$$

$$\frac{t_2}{RC} = \frac{T}{2RC} \approx 0,03.$$

Второе слагаемое более чем на порядок меньше первого, поэтому в первом приближении им можно пренебречь. В итоге максимальное напряжение на конденсаторе примерно оказывается равным среднему значению ЭДС

$$U_{\max} \approx \frac{\Phi_0}{t_1} = \Phi_0 \frac{2\pi}{T \Delta l} A \quad (14)$$

и пропорциональным амплитуде колебаний, что неплохо подтверждается экспериментом. Коэффициент пропорциональности в формуле (14) может быть определен из наклона графика зависимости напряжения от амплитуды колебаний и равен

$$K = \frac{\Delta U_{\max}}{\Delta A} = 12,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

Теперь с его помощью можно оценить максимальный магнитный поток, который создает магнит в катушке  $\Phi_0 \approx K \frac{T \Delta l}{2\pi} \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ Вб}.$



### Задача 58. «Свет и тени»

Первые два пункта задачи настолько традиционны, что даже входят в перечень обязательных лабораторных работ.

Пункт 3 достоин внимательного рассмотрения теней и бликов на экране, расположенном за щелью. Фактически здесь рассматривается достаточно простая проблема теней и полутеней. Как известно, размеры полутеней определяются соотношением между размерами источника и размерами препятствия, отбрасывающего тень. То, что в данном случае рассматриваются не тени от непрозрачной полоски, а свет, прошедший через щель сути дела не меняет. Так как пламя свечи вытянуто вертикально, то при вертикальном расположении щели светлая полоска оказывается более резкой и с меньшим размеров полутени, чем при горизонтальном расположении щели.

Объяснение возникновения изображения, полученного с помощью малого отверстия, дается в рамках геометрической оптики – дифракция света в данном случае существенной роли не играет. Изображение получается тем более резким, чем меньше размер отверстия. Правда, в этом случае его яркость заметно меньше. Кроме того, видимая четкость изображения и его яркость ухудшаются при увеличении расстояния между отверстием и экраном.



### Задача 59. «Интерференция на бумаге»

Прежде всего, поясним, почему полосы муара могут моделировать результат интерференции. Распределение интенсивности света в интерференционной картине определяется разностью фаз колебаний интерферирующих волн. Если нарисовать пленки, распределение пропускания которых описывается формулой (1), где  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$  - фазы интерферирующих волн, то их наложение воспроизведет интерференционную картину, описываемую функцией

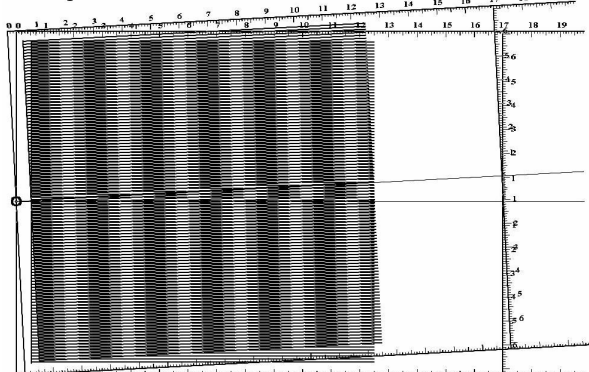
$$I = I_0(1 + \cos(\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)))^2.$$

Эта функция качественно совпадает с формулой (2). Таким образом, чтобы «угадать» моделируемую интерференционную схему, необходимо определить какой волне соответствует пропускание соответствующих пленок.

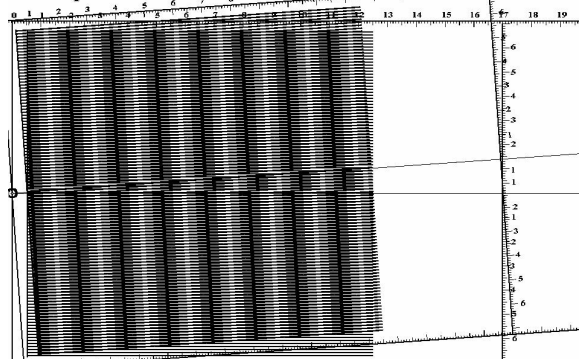
Фаза изменяется с координатой по линейному закону для плоской волны, падающей под некоторым (обычно малым) углом на плоский экран. Поэтому наложение двух изображений с параллельными штрихами моделирует интерференцию двух плоских волн, падающих на экран под малыми углами. В этом случае возникает система параллельных интерференционных полос, расстояние между которыми уменьшается при увеличении угла между падающими волнами. Эта аналогия позволяет легко получить формулу (4), приведенную в условии.

При наложении пленки и листа с параллельными штрихами возникают параллельные полосы муара, ширина которых уменьшается при увеличении угла между штрихами.

Поворот 3°



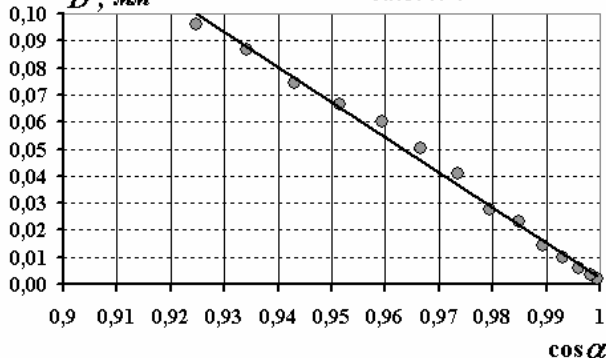
Поворот 4°



Очевидная линейаризация зависимости расстояния между полосами от угла, соответствующая формуле (4) подтверждает ее справедливость и позволяет определить период штрихов на пленке сначала на листе №1, а затем на листе №2.

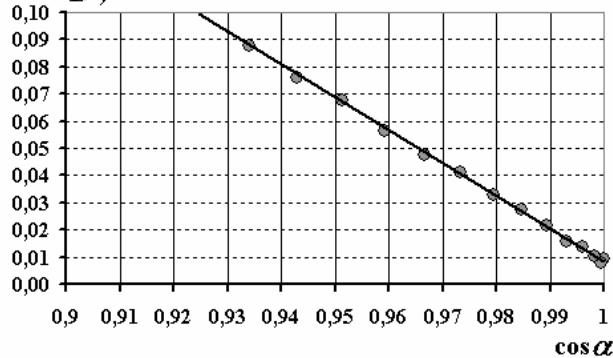
$D^2, \text{мм}^2$

Лист №1



$D^2, \text{мм}^2$

Лист №2





Распределению фаз, описываемому формулой (3), соответствует сферическая волна, падающая на плоский экран, то есть волна от точечного источника. Поэтому наложение двух систем колец Ньютона моделирует интерференцию волн, испущенных двумя точечными источниками, то есть схему Юнга. На основании формул (2) и (3) можно показать, что при сдвиге двух систем колец на расстояние  $\delta$ , возникают прямые равноотстоящие полосы муара, расстояние между которыми описывается формулой

$$\Delta x = \frac{D_0^2}{2\delta}.$$

Ширина полос оказывается обратно пропорциональной величине сдвига.

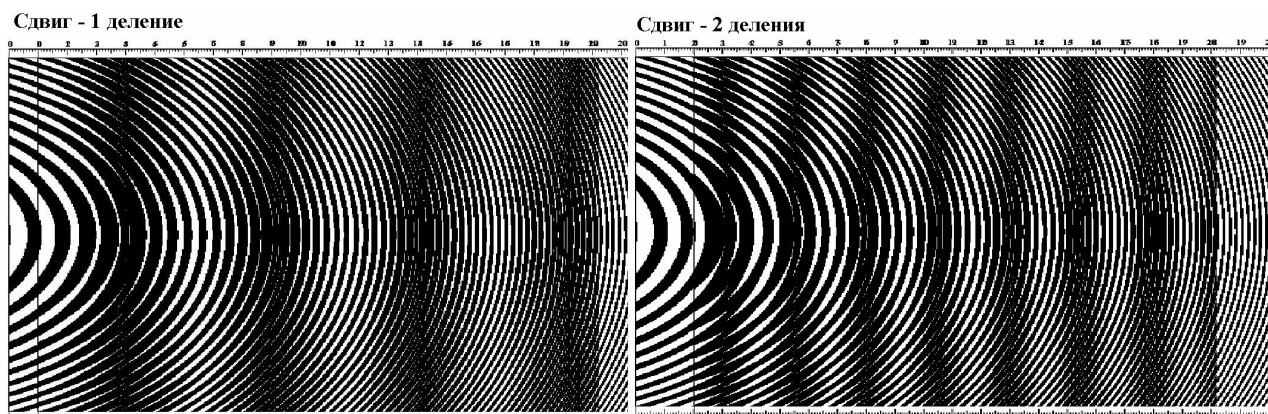
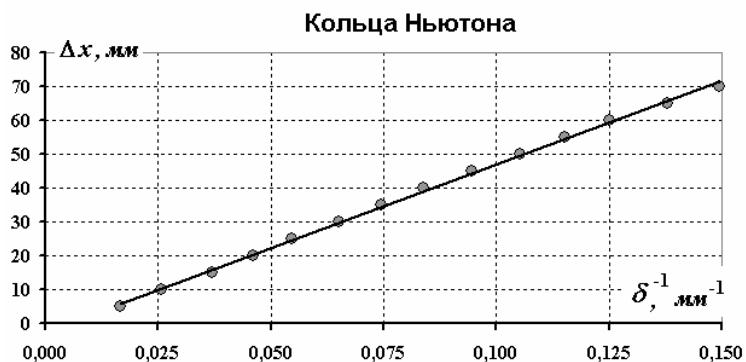
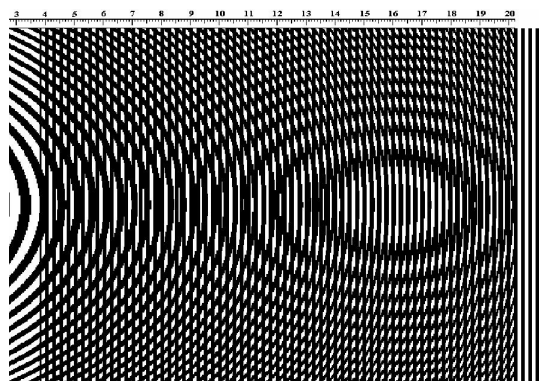


График зависимости ширины полосы муара  $\Delta x$  от величины обратной сдвигу оказывается линейным и позволяет определить требуемый параметр  $D_0$ .



### Интересное дополнение.

Хорошо известно, что в результате интерференции плоской и сферической волн возникает интерференционная картина, описываемая кольцами Ньютона. Наложить пленку с прямыми штрихами (плоская волна) на лист с кольцевыми штрихами (сферическая волна), то появляются полосы муара, иллюстрирующие этот эффект – наша теория полос муара похожа на правду!





### Задача 60. «Интерференция, дифракция, или...»

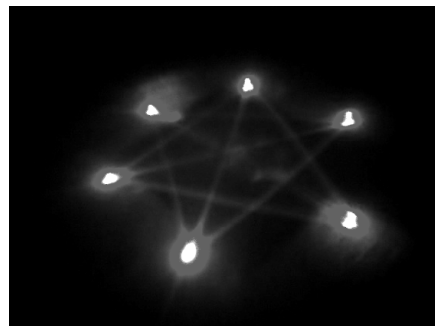
**Задание 0.** Длина волны излучения лазерной указки приведена на ее этикетке.

**Задание 1.** Без этого упражнения трудно обойтись, потому что значение фокусного расстояния понадобится в дальнейшем.

**Задание 2.** Обычная задача геометрической оптики – расходящийся пучок падает на собирающую линзу, собирается в фокусе и затем расходится. Диаметр пучка линейно зависит от расстояния до линзы. Теоретически легко получить формулу этой зависимости с учетом угла расходимости исходного пучка, а экспериментально ее измерить практически невозможно, уж больно она мала, неизбежные погрешности измерений практически полностью ее покрывают.

**Задание 3.** Кто из участников олимпиады не изучал дифракционную решетку? Кусочек диска таковой и является, только отражательной!

**Задание 4.** Действительно картинка получается очень занимательной – шесть ярких пятен, соединенных тонкими полосками света, настоящий кабалистический знак - звезда Давида! Но этот рисунок получается, если фликер осветить с обратной стороны, в обычном положении свет полностью отражается в обратном направлении. Такая картина легко объяснима, если предположить, что отражающими элементами является система уголковых отражателей – треугольных призм. Поэтому возникновение таких изображений есть следствие преломления света.



Если же удалить экран на большее расстояние, то можно заметить, что каждое пятно пересечено темными полосами, а это есть результат интерференции лучей преломленных в одном направлении разными призмами. Изменение периода этих интерференционных полос позволяет рассчитать период структуры фликера, например с помощью формулы дифракционной решетки.