

Знаете ли вы, что небольшое отверстие может формировать изображение. Это свойство было открыто еще в средние века, когда были сконструированы и построены первые камеры-обскуры.



Задача 58. «Свет и тени»

Оборудование: свеча, линза, матовый экран, экраны с отверстиями, линейка.

Вам необходимо изучить принципы действия простейших устройств, формирующих изображение: линзы и небольшого отверстия. В качестве источника света используется пламя свечи.

1. Измерьте с максимальной точностью фокусное расстояние линзы.
2. Получите формулу для расчета линейного увеличения изображения, формируемого линзой. Проверьте ее экспериментально. Определите вертикальный и горизонтальный размеры пламени.
3. Расположите между свечой и экраном темный экран со щелью. Опишите качественно распределение освещенности экрана. Исследуйте зависимость ширины светлой полосы на экране от расстояния между щелью и экраном. Проведите измерения для вертикального и горизонтального расположения свечи.
4. Получите изображение пламени свечи на экране, используя темный экран с круглым отверстием. Объясните механизм возникновения изображения в этом случае. Предложите численные характеристики, определяющие качество изображения, формируемого с помощью небольшого отверстия, исследуйте зависимость этих характеристик от взаимного расположения свечи, отверстия и экрана с изображением. Определите диаметр отверстия.

Комментарии к условию задачи.

1. Необходимо подготовить несколько экранов с отверстиями. Один - с узкой щелью шириной порядка 1 мм. Кроме того, 4-5 экранов, в которых просверлены отверстия диаметры которых увеличиваются от 0,5 до 3 мм. Экраны могут быть изготовлены из обычного картона.
2. Данную работу следует проводить в затемненном помещении – яркости изображений не велики.

Для наблюдения интерференции света необходимы специальные условия – когерентные и монохроматические источники, малые отверстия, большие расстояния и т.д. Если всего этого нет в наличии, то нужно осознать основную идею возникновения интерференционных полос – одна периодическая структура порождает другую периодическую структуру! Эта же идея лежит в описании полос муара (поверьте, рубашка на фото в мелкую полосочку), и математические описания весьма схожи!



Задача 59. «Интерференция на бумаге»

Оборудование: прозрачная пленка №1 с нанесенными прямыми параллельными линиями, прозрачная пленка №2 с нанесенными кольцами, набор из трех листов бумаги с нанесенными штрихами, кнопки канцелярские, картонная папка, линейка.

При наложении пленки с нанесенными штрихами на бумажные листы также с нанесенными штрихами возникают полосы муара, которые могут моделировать интерференцию волн.

Пусть пропускание пленки зависит от координат по некоторому закону

$$\tau = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi(x, y)), \quad (1)$$

Тогда пропускание двух наложенных пленок (или, что равносильно пленки и листа бумаги) равно

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{4}(1 + \cos \varphi_1(x, y))(1 + \cos \varphi_2(x, y)) = \\ &= \frac{1}{4}(1 + \cos \varphi_1(x, y) + \cos \varphi_2(x, y) + \cos \varphi_1(x, y) \cdot \cos \varphi_2(x, y)) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \cos \varphi_1(x, y) + \cos \varphi_2(x, y) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ являются быстроменяющимися функциями координат, то широкие (по сравнению со штрихами отдельных пленок) темные полосы и светлые полосы муара описываются последним слагаемым в выражении (1). Распределение этих полос определяется разностью функций $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, которые могут служить аналогом фаз колебаний интерферирующих волн.

На пленках и листах нанесены шкалы – в качестве единиц измерения длины используйте единицы этих шкал.

1.1 Расположите пленку №1 на листе №1, на котором нанесены такие же штрихи, как и на пленке, так чтобы пленку можно было поворачивать вокруг оси, в качестве которой используйте кнопку, воткнутую в картонную папку. Эта ось отмечена на пленке и листе бумаги кружком в левой части листа.

Измерьте зависимость расстояния между полосами муара от угла между штрихами на бумаге и на пленке.

Постройте график полученной зависимости.

Получите теоретическую зависимость ширины полос муара от угла между штрихами. По данным, полученным в п 1.1 определите ширину полос, нанесенных на пленку и лист бумаги №1.

Приведите оптическую интерференционную схему, которую моделирует данный опыт с полосами муара.

2. Расположите пленку №1 на листе №2, период штрихов на которой отличается от периода штрихов на пленке.

Измерьте зависимость расстояния между полосами муара от угла между штрихами на бумаге и на пленке.

Постройте график полученной зависимости. Определите период штрихов на листе №2.

Приведите оптическую интерференционную схему, которую моделирует данный опыт с полосами муара.

3. Расположите пленку №2 на листе №3. При сдвиге пленки возникают параллельные полосы муара.

Измерьте зависимость ширины полосы от сдвига пленки.

Постройте график полученной зависимости.

Пропускание пленки (и распределение полос на листе бумаги) в этом эксперименте описывается функцией

$$\tau = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{x^2 + y^2}{D_0^2} \right) \right). \quad (3)$$

Приведите оптическую интерференционную схему, которую моделирует данный опыт с полосами муара. Получите теоретическую зависимость ширины полосы муара от сдвига пленки. Определите по полученным данным параметр D_0 .

Подсказка. Можно показать, что при наложении систем двух параллельных полос ширина полос муара D связана с периодами решеток d_1 и d_2 соотношением

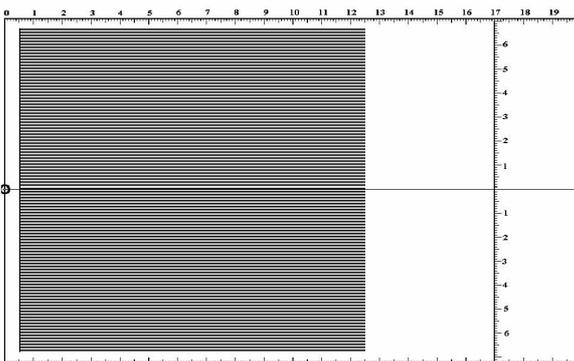
$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} - \frac{2}{d_1 d_2} \cos \alpha, \quad (4)$$

где α - угол между полосами.

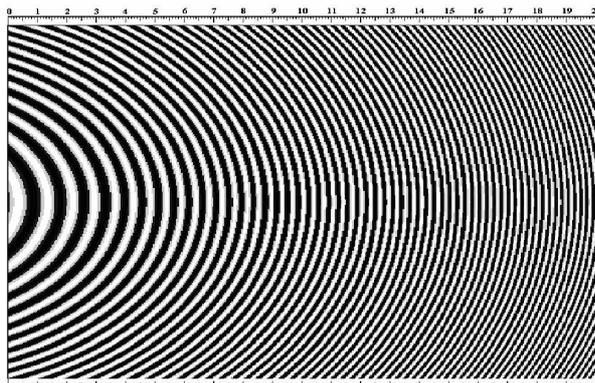
Комментарии к условию задачи.

1. Основная сложность подготовки данной задачи заключается в изготовлении необходимых пленок и листов бумаги с требуемым рисунком. Лучше всего это сделать с помощью компьютера и лазерного принтера. На пленке №1 нанесены параллельные штрихи с периодом менее 1 мм. Такой же рисунок наносится на лист №1. На листе №2 нанесены параллельные штрихи с другим периодом (увеличенным на 10-20%). На пленке №2 и листе №3 нанесена система колец, квадраты радиусов которых пропорциональны номеру кольца. Такая система носит названия колец Ньютона, потому, что она возникает в известной одноименной интерференционной схеме. Ниже приведены их изображения, для удобства на них нанесены и измерительные шкалы.

Пленка №1



Пленка №2



Сейчас можно найти много интересных блестящих предметов, достойных тщательного изучения. Очень интересными объектами является всевозможные широко рекламируемые отражатели. Помните: «Стань заметней в темноте!» Да они свет отражают хорошо, а если осветить их с противоположной стороны?



Задача 60. «Интерференция, дифракция, или...»

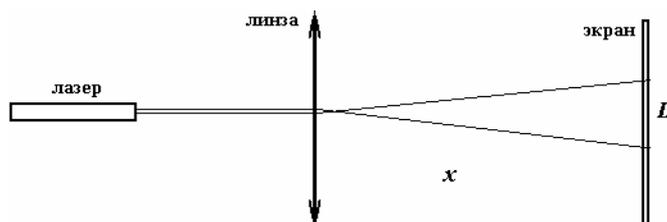
Оборудование: лазерная указка на подставке, линза собирающая, фликер-отражатель, кусочек CD- диска, экраны с миллиметровой бумагой, линейка.

*При поведении оптических экспериментов главное – точность настройки!
Экономьте батарейки лазерной указки (made in China!).
Не светите ею, когда не проводите измерения!*

Задание 0. Определите длину волны излучения лазерной указки.

Задание 1. Используя имеющееся оборудование, измерьте с максимальной точностью фокусное расстояние линзы.

Задание 2. Расположите собирающую линзу перед лазерной указкой за ней расположите экран. Измерьте зависимость диаметра пятна на экране от расстояния между линзой и экраном. Постройте график этой зависимости.



Оцените угловую расходимость лазерного луча.

Задание 3. Расположите перед лазерной указкой экран с отверстием, через который проходит лазерный луч. Перпендикулярно лучу расположите кусочек CD-диска, который является отражающей дифракционной решеткой. На экране вы можете увидеть три отражения. Измерьте зависимость расстояния между отражения от расстояния между экраном и диском. Определите период решетки CD-диска.

Задание 4. Расположите между лазерной указкой и экраном кусочек фликера. При этом на экране вы увидите шесть ярких пятен. Предложите структуру фликера, которая бы объясняла данное явление. Понятно, что на фликере находится некоторая пространственно периодическая структура. Определите ее период.

Комментарии к условию задачи.

1. Используемый в данной работе отражатель можно купить в киоске. Для экономии средств один отражатель можно разрезать на несколько частей, для работы достаточен квадратный кусочек со стороной в пол сантиметра.
2. Данную работу следует проводить в затененном помещении, полной темноты не требуется, но яркий солнечный свет испортит все работу!

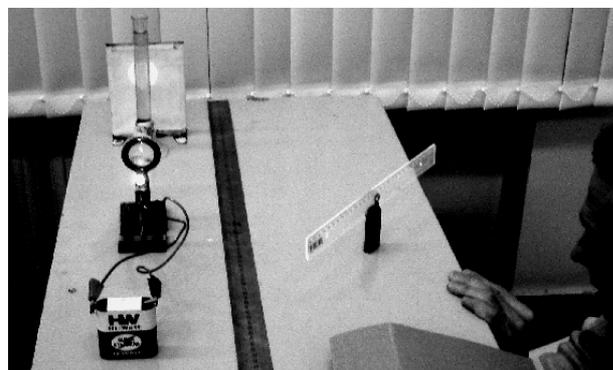
Радугу на небе видели все, а на столе?



Задача 61. «Радуга»

Оборудование:

1. Лампочка на подставке с питанием (батарейка, или ЛИП)
2. Линза собирающая
3. Экран
4. Линейка пластмассовая – **прозрачная**
5. Лист белой бумаги накрыть стол, на нем можно рисовать.
6. Пробирка на подставке.
7. Рулетка или мерная лента
8. Гель для мытья посуды
9. Кусок пластилина (как крепежный материал).



Задания.

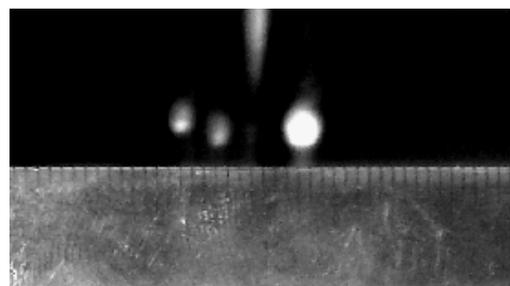
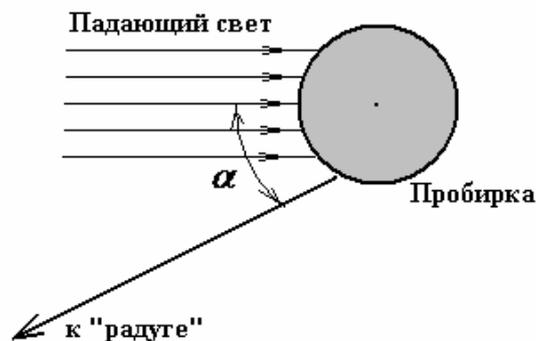
1. Измерьте фокусное расстояние представленной вам линзы.
2. Определите показатель преломления воды (\bar{n} - средний для всех волн видимого диапазона).
Методику определения этой величины разработайте самостоятельно. Не забудьте ее описать в своей работе.

3. В направлении, образующем угол около $\alpha \approx 40^\circ$ к первоначальному направлению распространения света образуется достаточно яркая цветная полоса (это и есть радуга). Измерьте с максимальной точностью этот угол. Нарисуйте ход лучей, образующих эту радугу. Докажите экспериментально справедливость вашего объяснения этой цветной полосы.

Не забудьте кратко (достаточно полстраницы) описать свои наблюдения и измерения.

После того, как вы нашли «радугу» экране, расположите на месте экрана свой глаз. При этом вблизи края пробирки вы увидите яркий цветной блик. Этот блик можно видеть и с большого расстояния. Для того, чтобы его видеть нужно также подбирать и высоту, на которой расположен ваш глаз.

Между пробиркой и местом расположения глаза расположите горизонтально прозрачную линейку, так чтобы блик был виден на фоне шкалы линейки (или чуть выше).



Комментарии к условию задачи.

1. Прежде всего, нужна тщательная юстировка – особенно при изменении малых изменений показателя преломления. Важно не сдвинуть с места ни лампочку, ни линзу, ни пробирку, ни прозрачную линейку.
2. В качестве подставок под пробирку и под линейку можно использовать пластилин – лучше запастись им - каждому по два куска!
3. Полное затемнение не нужно, но лучше когда в комнате сумрачно, тогда на экране лучше видна радуга. Наблюдать блик и измерять его положение можно и при дневном свете.
4. Прозрачную линейку лучше располагать на расстоянии порядка 50 см, а глаз за ней еще на сантиметров 25 дальше.

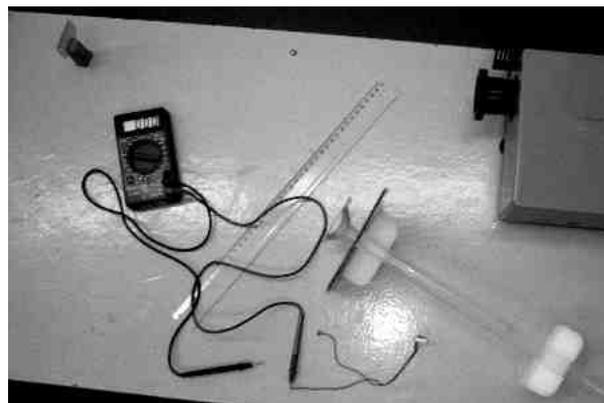
Радуга красивое и эффектное зрелище, теперь нам необходимо понять, почему небо голубое.



Задача 62. «Лучше быть рассеянным, чем отраженным!»

Оптические измерения требуют предельной тщательности и аккуратности, не жалейте времени на юстировку, каждый раз убеждайтесь, что свет идет вдоль оси трубки, используйте предоставленные куски картона, чтобы «убрать» лишний свет!

Приборы и оборудование: фотоэлемент, мультиметр, источник света (диапроектор), соединительные провода, дифракционная решетка на подставке, экран, стеклянная трубка с мутным раствором, линейка. Куски картона



Рекомендуемое расположение оборудования показано на фотографии.

Фотоэлемент подключается напрямую к мультиметру, переключатель поставьте на измерение напряжения, считайте, что зависимость показаний фотоэлемента от интенсивности падающего на него света прямо пропорциональная.

В качестве дифракционной решетки используется кусочек от лазерного диска, так как штрихи этой решетки изогнуты, то дифракционная картина на экране имеет форму сектора. Тем не менее, условия максимумов дифракции остаются справедливыми.

Направьте поток света сквозь трубку с раствором. Убедитесь, что рассеянное излучение хорошо видно через боковую поверхность трубки.

1.1 Пропустите через трубку белый свет, отраженный кусочком диска. Измерьте зависимость интенсивности рассеянного света от расстояния, пройденного светом через мутную среду. Постройте график полученной зависимости.

1.2 Измерьте зависимость интенсивности рассеянного света от расстояния пройденного светом через мутную среду. Измерения проведите для излучений нескольких 3- 4 длин волн (по возможности старайтесь, чтобы проходящий свет был близок к монохроматическому).

Не забудьте привести схему вашей установки с указанием расстояний между ее элементами.

Для монохроматического излучения интенсивность света, прошедшего через мутную среду, зависит от пройденного расстояния l по закону

$$I = I_0 e^{-\mu l}, \quad (1)$$

где μ - показатель рассеяния.

1.3 Постройте графики полученных зависимостей. Дайте их теоретическое описание, проведите сравнение с теоретической зависимостью.

1.4 Дайте качественное объяснение зависимости, полученной в п.1.1

Комментарии к условию задачи.

1. Одна из целей этой почти качественной задачи – дать совет, где можно найти простой и надежный фотоприемник. Калькуляторы сейчас подешевели настолько, что их уже могут давать как сдачу при покупке газет. Многие из них снабжены фотоэлементом, только проследите – иногда вместо фотоэлемента вставляют муляж (*made in China!*). Вскройте коробку и подключитесь к выводам этого фотоэлемента и вы получите надежный фотоэлемент, даже в корпусе.
2. Сложнее найти трубку, одна сторона ее может быть закрыта обычной пробкой, а вот вторая должна быть прозрачна. Сделать это не так уж просто – мы обращались к стеклодувам! Длина трубки должна быть не менее 40 см.
3. Мутный раствор – это обыкновенная вода с несколькими каплями молока – традиционная среда для изучения рассеяния света, в том числе и в атмосфере!
4. В качестве источника света лучше использовать достаточно мощный диапроектор, в этом случае получаются стабильные результаты.
5. Наконец, следует использовать дифракционную решетку, которую, в принципе можно заменить набором светофильтров.

4.11 Если у вас нет ускорителя.

Современная физика не мыслима без физики элементарных частиц. Конечно, мы не предлагаем исследовать свойства кварков в свободном состоянии, но познакомиться с методами исследования в этой области следует попытаться!

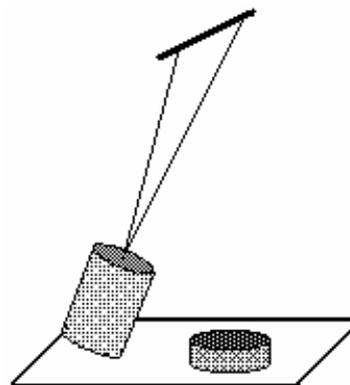


Задача 63. «Почти ядерная физика»

До настоящего времени основным экспериментальным методом исследования свойств микрочастиц является изучение характеристик столкновения частиц. На этом пути экспериментатор сталкивается со множеством проблем: поток частиц, как правило, имеет большой разброс значений энергии, вероятности некоторых процессов могут быть достаточно малы, измерение некоторых характеристик частиц вызывает технические сложности, неизбежно присутствуют значительные флуктуации результатов, проведение эксперимента требует терпения, а также больших временных и материальных затрат.

Вам предстоит, частично познакомится с некоторыми из этих проблемами, в модельной системе: в качестве моделей частиц используются обыкновенные пластмассовые шашки, «ускорителем» частиц - металлический цилиндр, подвешенный на нити, тормозящей средой и регистрирующей системой - лист бумаги и, наконец, источником энергии, управляющей, контролирующей и анализирующей системой Вы сами.

Соберите установку для исследования соударений шашек между собой. Подвесьте металлический цилиндр на нитях так, чтобы в нижней своей точке он почти касался стола. Отклоняя нить на известный угол, и плавно отпуская, его можно использовать в качестве «ускорителя» частицы. После удара шашка должна скользить по бумаге, расстеленной на столе или на полу (где вам удобней).



Задание 1. Покажите, что мерой начальной кинетической энергии частицы (шашки) может служить путь, пройденный этой шашкой до остановки.

Задание 2. Постарайтесь добиться максимальной стабильности начальной энергии шашки сразу после удара. Оцените экспериментально относительную флуктуацию начальной энергии шашки. Какими методами вам удалось уменьшить разброс начальных энергий?

Относительной флуктуацией физической величины X называется отношение ее среднеквадратичного отклонения к среднему значению

$$\varepsilon = \frac{\sigma_X}{\langle X \rangle}; \quad \langle X \rangle = \frac{\sum_k X_k}{N}; \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_k (X_k - \langle X \rangle)^2}{N}}.$$

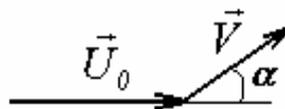
Задание 3. Исследуйте зависимость начальной энергии шашки при центральном ударе от угла отклонения нити φ . Проведите сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей.

Задание 4. Считая удар металлического цилиндра о шашку абсолютно упругим, а массу цилиндра значительно больше массы шашки, определите коэффициент трения шашки о бумагу.

Какие систематические факторы, по вашему мнению, наиболее сильно влияют на ошибку определения коэффициента трения?

Задание 5. Исследуйте нецентральный удар цилиндра о шашку.

Покажите (теоретически), что скорость шашки после удара (в рамках описанных в п.4 приближений) пропорциональна $\cos \alpha$, где α угол между скоростями цилиндра до удара \vec{U}_0 и шашки после удара \vec{V} . Исследуйте экспериментально эту зависимость.



Задание 6. Определите коэффициент потерь η механической энергии при центральном ударе двух шашек, одна из которых первоначально покоилась.

$$\eta = \frac{E_0 - E}{E_0}, \text{ где } E_0 - \text{механическая энергия шашек до удара, } E - \text{энергия после удара.}$$

Задание 7. Исследуйте зависимость скорости шашек после столкновения (одна из которых покоилась) от угла α между скоростями шашки до и после удара.

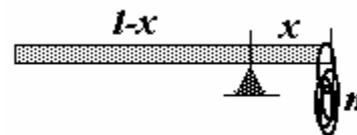
Пункты 6. 7. Рекомендуем выполнять одновременно – произошел центральный удар – относите его к п. 6, если нецентральный, то к п.7, если столкновение не произошло – используйте результат для контроля начальной энергии.

Решения задач части 4.



Задача 20. «Задача Архимеда».

Одна из возможностей проведения эксперимента заключается в изучении зависимости длины x плеча рычага, к которому прикрепляются скрепки, от числа n скрепок, подвешенных на конец карандаша. Условия равновесия рычага в данном случае имеет вид



$$\frac{M}{2l}(l-x)^2 = \frac{M}{2l}x^2 + nmx, \quad (1)$$

где m, M - массы скрепки и карандаша, соответственно, $l = 168 \text{ мм}$ - длина карандаша. Из уравнения (1) следует выражение для длины x

$$x = \frac{l}{2\left(1 + n\frac{m}{M}\right)}, \quad (2)$$

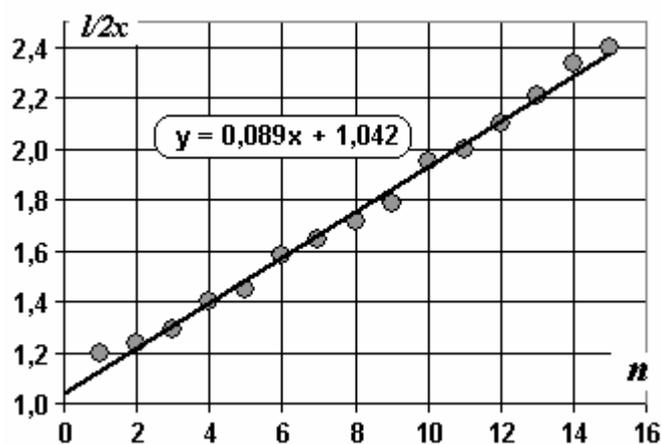
которое можно привести к линейному виду, удобному для проверки

$$\frac{l}{2x} = 1 + n\frac{m}{M}. \quad (3)$$

В таблице приведены измеренные значения длины плеча x , при различном числе подвешенных скрепок n .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x, \text{мм}$	70	68	65	60	58	53	51	49	47	43	42	40	38	36	35

На рисунке показан график зависимости (3), на нем также приведено уравнение экспериментальной зависимости, полученное с помощью МНК. Этот линейный график подтверждает справедливость уравнения, а, следовательно, правильность правил равновесия рычага. Важно отметить, что свободный член линейной зависимости в пределах погрешности равен 1, в полном соответствии с теоретическим уравнением (3). Наклон графика равен отношению массы скрепки к массе карандаша. Рассчитанное значение этого отношения



$$\frac{m}{M} = (8,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-2}$$

или один карандаш весит примерно 12 скрепок.

Обратите внимание, что экспериментальная проверка условия равновесия должна сводиться к изучению зависимости, полученной теоретически. Наиболее удобным, наглядным и убедительным справедливости полученной зависимости является ее линеаризация.



Задача 21. «Взвешивание воздуха».

1. Рассмотрим условия равновесия весов.

В начальном положении равенство моментов сил, действующих на разные плечи весов, имеет вид

$$m_1 l_1 \cos \alpha = m_2 l_2, \quad (1)$$

где m_1, m_2 - массы плеч (с уравнивающим грузом), l_1, l_2 - расстояния от упора до центров масс плеч. После

того, как на горизонтальное плечо повесили гайку, массы m_0 на расстоянии l от упора, это плечо наклонится на некоторый угол β , который можно найти из условия равновесия в этом положении

$$m_1 l_1 \cos(\alpha - \beta) = m_2 l_2 \cos \beta + m l \cos \beta. \quad (2)$$

Из этих уравнений находим

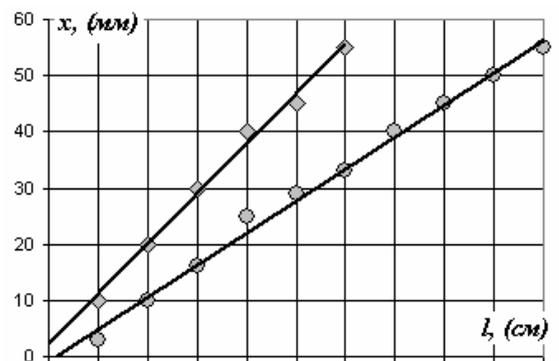
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_0 l}{m_1 l_1 \sin \alpha}. \quad (3)$$

Таким образом, тангенс угла наклона прямо пропорционален моменту приложенной силы, что делает данные весы линейными. Следовательно, в качестве показаний весов удобно использовать x - расстояние, которое “отсекает” стрелка на линейке. Если расстояние от упора до линейки обозначить L , то показания весов определяются формулой:

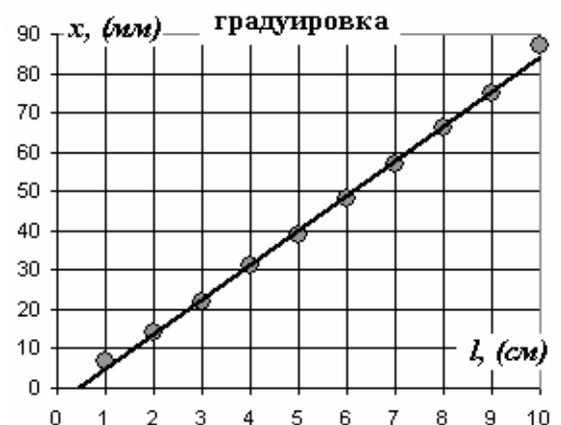
$$x = L \operatorname{tg} \beta = \frac{L}{m_1 l_1 \sin \alpha} m_0 l = K m_0 l, \quad (4)$$

где K - коэффициент пропорциональности (чувствительность), зависящий от геометрических свойств весов.

2. Для примера на рисунке приведены графики экспериментально полученных зависимостей при двух разных значениях угла α ($\alpha_1 \approx 20^\circ, \alpha_2 \approx 10^\circ$). Как видно из графиков, прямая пропорциональная зависимость $x(l)$ подтверждается экспериментально, причем, с уменьшением угла α чувствительность весов повышается.



3. Для измерения веса (здесь под весом понимается разность между силой тяжести и силой Архимеда) воздуха в воздушном шарике закрепим не надутый шарик с помощью нитки на конце плеча рычага и с помощью пластилина уравновесим весы (установим измерительное плечо горизонтально). После этого проградуируем весы с помощью гайки, массу которой определим взвешиванием. Результаты измерений приведены на рисунке (градуировочный график). Здесь измерения следует провести с максимальной тщательностью.



Надуем воздушный шарик и прикрепим его на прежнее место, предварительно сняв гайку. Снимем показания наших весов x_0 . По градуировочному графику найдем значение l_0 , такое, чтобы гайка массы m_0 , находящаяся

на расстоянии l_0 , создавала такой же момент силы, как вес воздуха в шарике на расстоянии l_1 (расстояние от упора до точки подвеса шарика)

$$m_0 l_0 g = l_1 \tilde{m} g,$$

где \tilde{m} - "избыточная" масса воздуха. Отсюда следует, что $\tilde{m} = m_0 \frac{l_0}{l_1}$.

По нашим измерениям, $m_0 = (500 \pm 10) \cdot 10^{-6} \text{ кг}$, $l_0 = (4,5 \pm 0,2) \text{ см}$, $l_1 = (20,0 \pm 0,2) \text{ см}$, что соответствует $\tilde{m} \approx (0,112 \pm 0,006) \text{ г}$ с относительной погрешностью 5%.

Для определения давления воздуха в шарике следует воспользоваться уравнением состояния газа, причем для его использования следует оценить объем надутого шарика.

Отметим традиционную последовательность выполнения задания: получение теоретической зависимости, ее экспериментальная проверка, получение градуировочного графика, измерения, расчет окончательного результата и его погрешности.



Задача 22. Вязкость жидкости.

1. Теоретическое описание движения пластилинового шарика очевидно. При падении тела в вязкой среде (жидкости или газе) на него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho g V$ и сила сопротивления Стокса $F = 6\pi\eta v$. Так как сила сопротивления возрастает с ростом скорости, то при некотором значении последнее движение становится равномерным. Скорость установившегося движения можно определить из условия равновесия сил

$$mg - F_a - F_c = 0 \quad (1)$$

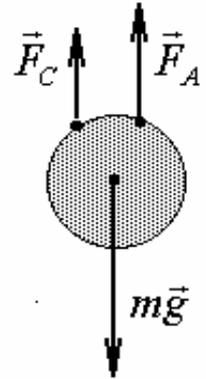
Для шарика радиуса R , падающего в жидкости уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - 6\pi\eta R v = 0, \quad (2)$$

ρ_m - плотность вещества тела, ρ - плотность жидкости, в которой падает тело.

Из этого уравнения находим скорость установившегося движения

$$v = \frac{2R^2(\rho_m - \rho)g}{9\eta}. \quad (3)$$



2. Для проверки равномерности движения следует поступать традиционным способом - показать, что время падения пропорционально высоте падения. Эксперимент подтверждает это предположение.

3-4. Для измерения плотностей пластилина и жидкости (крахмального клейстера) можно воспользоваться методом гидростатического взвешивания: измерить вес куска пластилина в воздухе, в воде и киселе. Отметим, что плотность киселя практически не отличается от плотности воды.

5. На выполнении этого пункта остановимся подробнее.

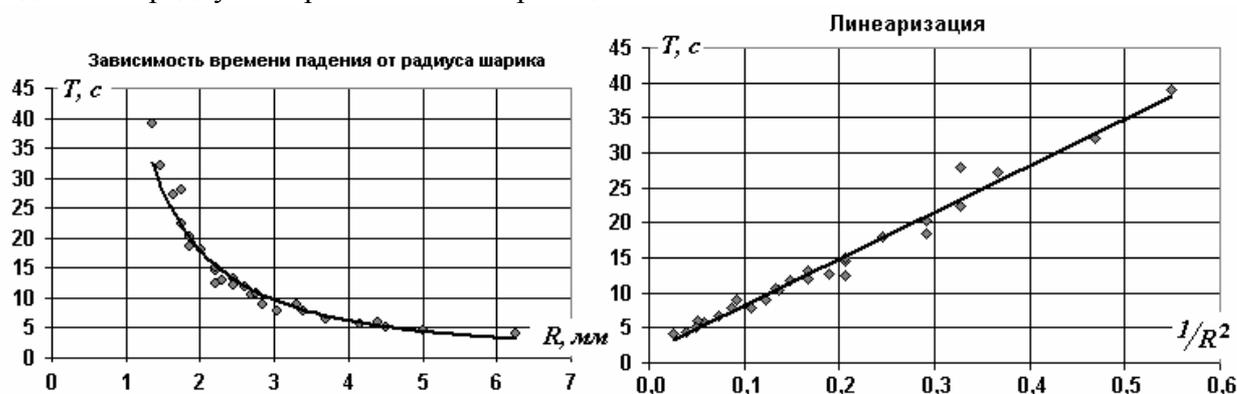
Проверить применимость формулы Стокса можно, исследуя зависимость времени опускания шарика на расстояние h (не следует начинать измерения с верхней точки -

следует начинать отсчет времени после некоторого 2-3 см участка разгона) от радиуса шарика. Из формулы (3) следует, что это время равно

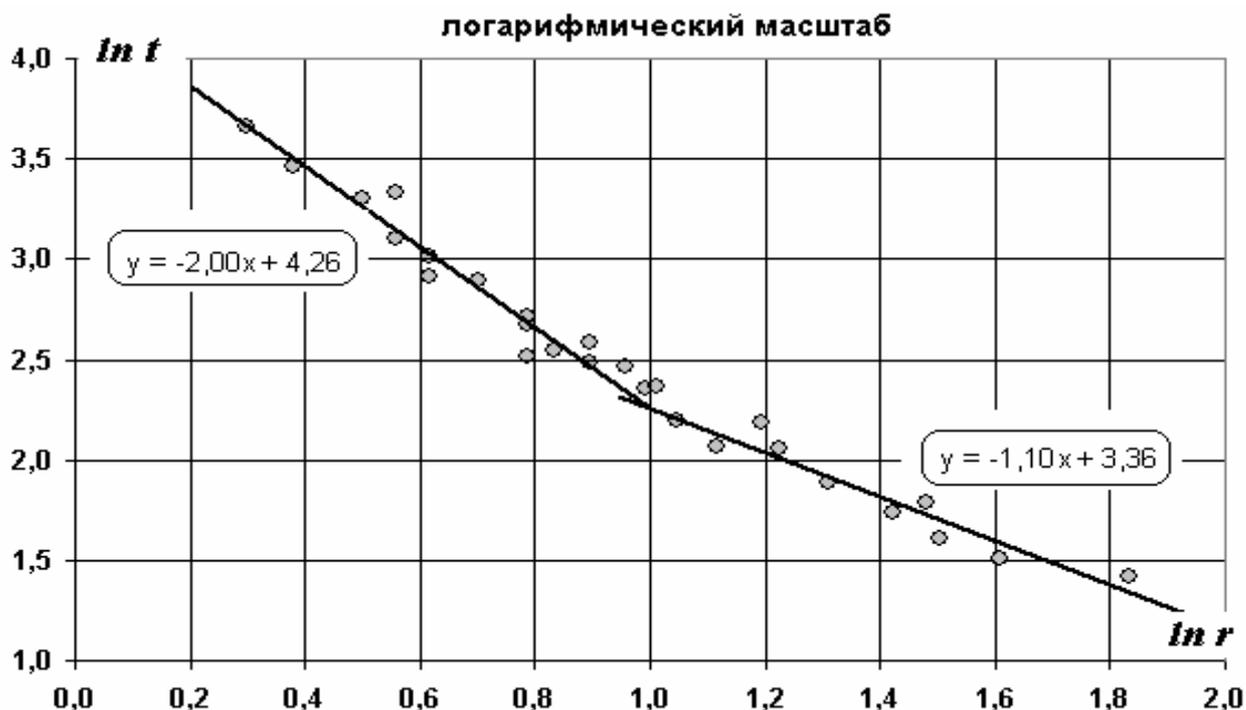
$$t = \frac{h}{v} = \frac{9\eta h}{2(\rho_w - \rho)g} \frac{1}{R^2} \quad (4)$$

Поскольку проводить измерения диаметра шарика достаточно сложно (шарики деформируются при сильном сдавливании штангенциркулем) и движение шарика в жидкости подвержено случайным влияниям (начинается вращение, трение о стенки) количество опытов должно быть достаточно велико.

Экспериментальным подтверждением справедливости проведенного теоретического анализа может служить линейность зависимости времени движения t от $\frac{1}{R^2}$. Ниже на графиках приведены экспериментально полученные графики зависимости времени падения от радиуса шарика и ее линейризация.



На первый взгляд кажется, что в пределах погрешности экспериментальные данные подтверждают сделанные предположения, то есть линейризация удалась!



Более тщательный анализ частично отвергает построенную теоретическую модель. Построим данную зависимость в логарифмическом масштабе. При выполнении формулы (4) коэффициент наклона графика зависимости $\ln t$ от $\ln R$ должен быть примерно равен

(– 2). Однако такой наклон графика получен только для шариков, радиусы которых не превышают примерно 2,5 мм. При больших радиусах формула Стокса оказывается не применимой! Поэтому дальнейшие расчеты вязкости клейстера должны проводиться только по данным для малых шариков.



Задача 23. Движение ионов.

Кроме испытания терпения (время измерения составляет около полутора часов), выполнение данной задачи не вызывает особых сложностей. Зависимость смещения окрашенной границы от времени в пределах погрешность оказывается линейной. В нашем эксперименте напряжение между электродами равно $U = 4B$, расстояние между ними $l = 6,0\text{ см}$. Результаты измерений показаны на графике. Расчет по МНК приводит к следующим значениям параметров линейной зависимости $x = at + c$:

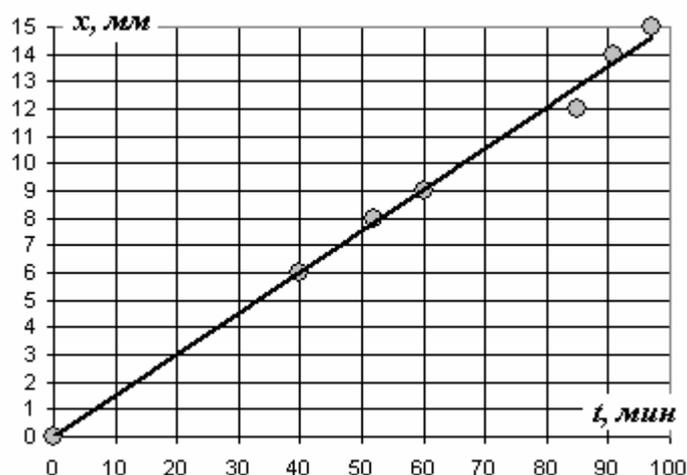
$$a = (0,15 \pm 0,1)\text{ мм / мин};$$

$$c = (0,02 \pm 0,68)\text{ мм}.$$

Значение подвижности ионов

$$b = (3,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-8} \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}; \text{ относительная}$$

погрешность найденного значения $\varepsilon \approx 7\%$.





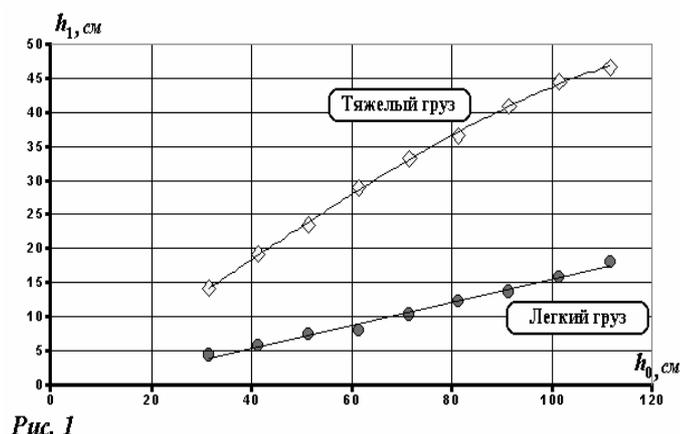
Задача 24. «Магнитная вязкость»

Часть 1. Движение без магнитов.

Результаты измерений зависимостей высоты подъема грузов h_1 от начальной высоты падения h_0 представлены в таблице 1. Внесенные средние значения высот подъема, полученные по трем измерениям.

Таблица 1.

$h_0, \text{см}$	$h_1, \text{см}$ (легкий)	$h_1, \text{см}$ (тяжелый)
111,5	18	46,75
101,5	15,75	44,5
91,5	13,75	41
81,5	12,25	36,5
71,5	10,25	33,25
61,5	8	29
51,5	7,5	23,5
41,5	5,75	19,25
31,5	4,25	14



Графики, построенные по полученным данным, представлены на Рис. 1.

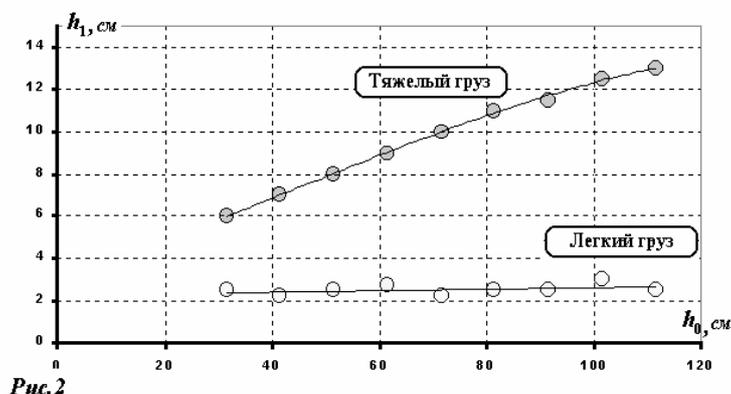
Результаты показывают, что потери механической энергии достаточно велики. Основными их причинами, по-видимому, является сила трения в оси блока и неупругость динамического удара при переходе груза через нижнюю точку. Почти строгая пропорциональность полученной зависимости для легкого груза говорит о возможности пренебрежения сопротивлением воздуха. Для тяжелого груза средняя скорость вращения больше, поэтому влияние силы сопротивления воздуха существенно, что подтверждается заметной нелинейности графика, особенно при больших высотах падения.

Часть 2. Магнитное торможение.

Результаты аналогичных измерений, проведенные при закреплении в держателе двух больших кольцевых магнитов представлены в Таблице 2.

Таблица 2.

$h_0, \text{см}$	$h_1, \text{см}$	$h_1, \text{см}$
111,5	2,5	13
101,5	3	12,5
91,5	2,5	11,5
81,5	2,5	11
71,5	2,25	10
61,5	2,75	9
51,5	2,5	8
41,5	2,25	7
31,5	2,5	6



Графики, построенные по полученным данным, представлены на Рис. 2.

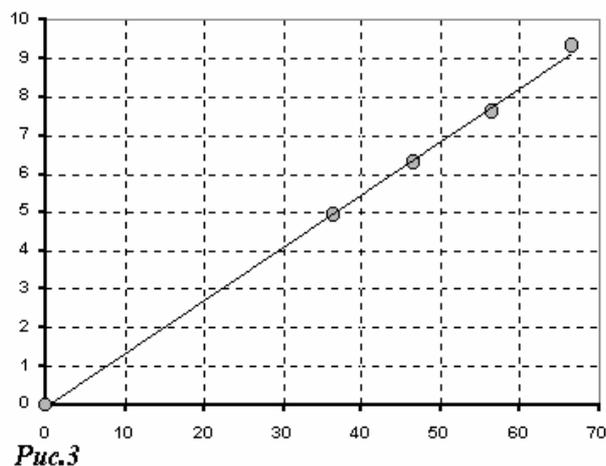
Как следует из полученных результатов влияние магнитов на вращение пластинки весьма существенно – величина вторичного подъема грузов уменьшилась более чем в три раза, а легкого груза более чем в шесть раз. Это факт говорит о том, что влияние «магнитной вязкости» на силы торможения является преобладающим. Особенно существенно ее влияние на движение легкого груза – время подъема в пределах погрешности не зависит от высоты, с которой опускается груз – следовательно, можно считать, что легкий груз практически весь путь проходит с постоянной скоростью.

Часть 3. Индукция магнитного поля магнита.

Для подтверждения гипотезы о равномерном движении можно провести следующий доказательный эксперимент. Расположить в держателе малые магниты (если при них движение будет равномерным, то при более сильных магнитах, тем более, движение будет равномерны) и провести измерения времени движения t малого груза, отпущенного со строго определенной высоты, в зависимости от длины последнего участка пути S . Результаты таких измерений представлены в Таблице 3 и на графике Рис.3. Результаты получены при начальной высоте груза равной 86 см.

Таблица 3.

$S, см$	$t, с$
66,5	9,35
56,5	7,6
46,5	6,31
36,5	4,95



Прямая пропорциональная зависимость между измеренными величинами однозначно свидетельствует о равномерности движения.

При движении проводника в магнитном поле в нем возникают индукционные токи Фуко, которые взаимодействуя с породившим их полем приводят к возникновению тормозящих сил, которые и называются силами вязкого трения. Величина этой силы (в нашем случае момента силы) пропорциональна квадрату индукции поля и скорости движения проводника. Следовательно, в установившемся режиме изучаемая пластика будет вращаться с угловой скоростью обратно пропорциональной квадрату индукции поля. Следовательно, время движения между двумя фиксированными точками пропорционально квадрату вектора индукции. Окончательно получаем, что измеряемая индукция магнитного поля пропорциональна квадратному корню из времени движения

$$B = C\sqrt{t}.$$

В трех указанных случаях (по одной паре магнитов, и две пары магнитов средние времена движения оказались равными $t_1 = 9,4с$, $t_2 = 13,9с$, $t_3 = 25,3с$, что приводит к следующей пропорции между индукциями полей, создаваемых магнитами

$B_1 : B_2 : B_{1+2} \approx 3 : 3,7 : 5$. Как это ни странно на первый взгляд – принцип суперпозиции поле в данном случае не выполняется! Что связано, с тем, что при размещении двух пар магнитов изменяется расстояние между магнитами.



Задача 25. «Задача Г. Галилея – скатывание по наклонной плоскости»

1. Экспериментальное изучение закона скатывания шарика должно проводиться традиционным методом – измеряется время скатывания из начального положения до фиксированного значения длины скатывания L . Так время движения мало (несколько секунд), то его измерение неизбежно приводит к существенным случайным погрешностям. Поэтому необходимо для каждой длины скатывания проводить несколько измерений времени движения¹. Результаты таких измерений приведены в таблице 1. В последних строках таблицы приведены средние значения времен скатывания и погрешности их измерения при постоянной высоте наклонной плоскости $h = 2,0\text{см}$. Для этих измерений выбрана малая высота, чтобы измеряемые времена были побольше.

Таблица 1. Зависимость времени скатывания от длины пройденного пути.

L (см)	10	20	30	40	50	60
t (с)	1,12	1,32	2,44	2,38	2,75	3,15
	1,34	1,38	1,94	2,56	2,93	3,80
	1,1	1,44	2,1	2,41	3,08	3,21
	1,12	1,42	1,91	2,37	2,93	3,08
	0,98	1,35	2,13	2,39	3,05	3,28
	1,12	1,38	2,15	2,42	2,91	3,20
	1,21	1,40	1,95	2,29	2,86	3,20
	1,05	1,52	2,12	2,34	2,92	3,21
	1,30	1,62	2,14	2,32	3,03	3,19
$\langle t \rangle, c$	1,15	1,43	2,09	2,39	2,94	3,26
$\Delta t, c$	0,23	0,19	0,34	0,15	0,20	0,42



Если предположить, что движение шарика является равноускоренным, то зависимость пройденного пути от времени описывается законом $L = \frac{at^2}{2}$. Для проверки этого закона следует построить график зависимости квадрата скорости от длины пути (именно так – во-первых, эта зависимость должна быть линейной, во-вторых, длина измеряется точнее, чем время движения):

$$t^2 = \frac{2}{a} L . \quad (1)$$

Построенный график этой зависимости показывает, что в пределах погрешностей измерения данная зависимость действительно может считаться линейной, поэтому модель равноускоренного движения в данном случае применима.

¹ В очередной раз обращаем внимание на методику измерений: фиксируется расстояние, затем измеряется время движения.

2. Для измерения ускорения можно измерять время движение по максимальной длине желоба, так как в этом случае это время будет максимально, поэтому погрешности измерений будут меньше.

Из закона движения следует, что ускорение рассчитывается по формуле

$$a = \frac{2L}{t^2}. \quad (2)$$

Результаты измерений времени скатывания ($L = 68\text{см}$) от высоты наклонной плоскости h приведены в таблице 2. В ней же приведены рассчитанные значения ускорений, а также рассчитанные значения доли энергии вращательного движения.

Таблица 2. Зависимость времени скатывания от высоты наклонной плоскости. Расчет ускорения и доля энергии вращательного движения.

$h, \text{см}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$t, \text{с}$	1,51	1,64	1,78	1,82	1,96	2,16	2,45	2,69	3,45	4,9
$a, \text{м/с}^2$	0,60	0,51	0,43	0,41	0,35	0,29	0,23	0,19	0,11	0,057
η	0,59	0,61	0,63	0,59	0,59	0,60	0,61	0,57	0,60	0,61

График зависимости ускорения от высоты наклонной плоскости указывает, что величина ускорения примерно пропорциональна высоте наклонной плоскости.



Хорошо известно и легко доказуемо, что при движении тела по наклонной плоскости ускорение пропорционально синусу угла наклона к горизонту. В исследованном случае углы наклона малы, поэтому синус угла наклона примерно равен $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{h}{L}$, что и объясняет полученную экспериментально зависимость.

3. В верхней точке шарик обладает потенциальной энергией $W = mgh$, которая переходит в кинетическую энергию, частично поступательного $\frac{mv^2}{2}$, частично вращательного движения. Получим формулу для расчета доли полной энергии, перешедшей в кинетическую энергию вращательного движения

$$\eta = 1 - \frac{mv^2}{mgh} = 1 - \frac{v^2}{2gh},$$

здесь v - мгновенная скорость шарика в нижней точке наклонного желоба, которая при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью в два раза превышает среднюю скорость движения $v = 2\langle v \rangle = 2\frac{S}{t}$. Таким образом, расчетная формула имеет вид

$$\eta = 1 - \frac{v^2}{2gh} = 1 - \frac{2S^2}{ght^2}. \quad (3)$$

Результаты расчетов по этой формуле приведены в последней строке таблицы 2. Расчеты показывают, что доля вращательной энергии не зависит от угла наклонной плоскости и равна $\eta \approx 0,60 \pm 0,03$

Необязательное теоретическое дополнение.

Теоретическое значение найденной доли энергии вращательного движения определяется по формуле

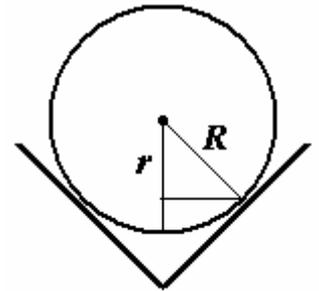
$$\eta = \frac{\frac{I\omega^2}{2}}{\frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{mv^2}{I\omega^2}}, \quad (4)$$

где $I = \frac{2}{5}mR^2$ - момент инерции шарика. Если шарик катится по плоской поверхности, то $v = \omega R$, тогда

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{mv^2}{I\omega^2}} = \frac{2}{7} \approx 0,3.$$

В наших экспериментах шарик катился по прямоугольному желобу, поэтому скорость центра шарика связана с его угловой скоростью соотношением $v = \omega r = \omega \frac{R}{\sqrt{2}}$. В этом случае искомое отношение оказывается равным

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{mv^2}{I\omega^2}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \approx 0,44.$$



Вероятно, что отклонение экспериментального значения связано с влиянием силы трения, приводящим к увеличению времени движения.



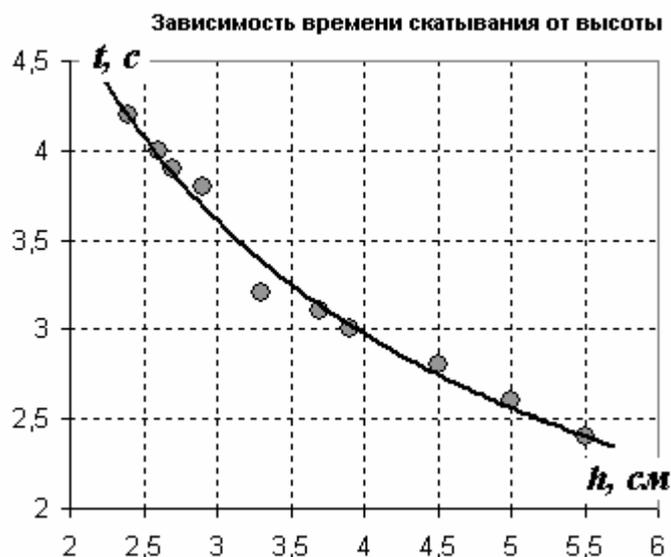
Задача 26. «Трубка на наклонной плоскости»

1. Выполнение этого задания полностью аналогично пункту 1 в предыдущей задаче 25, поэтому здесь не рассматривается. Отметим, что скатывание цилиндра также может рассматриваться как равноускоренное движение.

2. Результаты измерений зависимости времени t скатывания трубки с наклонной плоскости (постоянной длины $S = (80 \pm 1) \text{ см}$) от высоты наклонной плоскости h , приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1.

$h, \text{ см}$	$t, \text{ с}$
2,4	4,2
2,6	4,0
2,7	3,9
2,9	3,8
3,3	3,2
3,7	3,1
3,9	3,0
4,5	2,8
5,0	2,6
5,5	2,4



3. Для определения ускорения свободного падения и коэффициента трения необходимо получить теоретическую зависимость времени скатывания от высоты и линеаризовать ее. При скатывании трубки выполняется закон сохранения энергии.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + F_{\text{тр.}} \cdot S. \quad (1)$$

Второе слагаемое $\frac{mv^2}{2}$ появляется, так как трубка участвует не только в поступательном, но и во вращательном движении. Таким образом:

$$mgh = mv^2 + F_{\text{тр.}} \cdot S, \quad (2)$$

где v - конечная скорость трубки при скатывании по наклонной плоскости; Так как углы возвышения наклонной плоскости малы, то силу трения

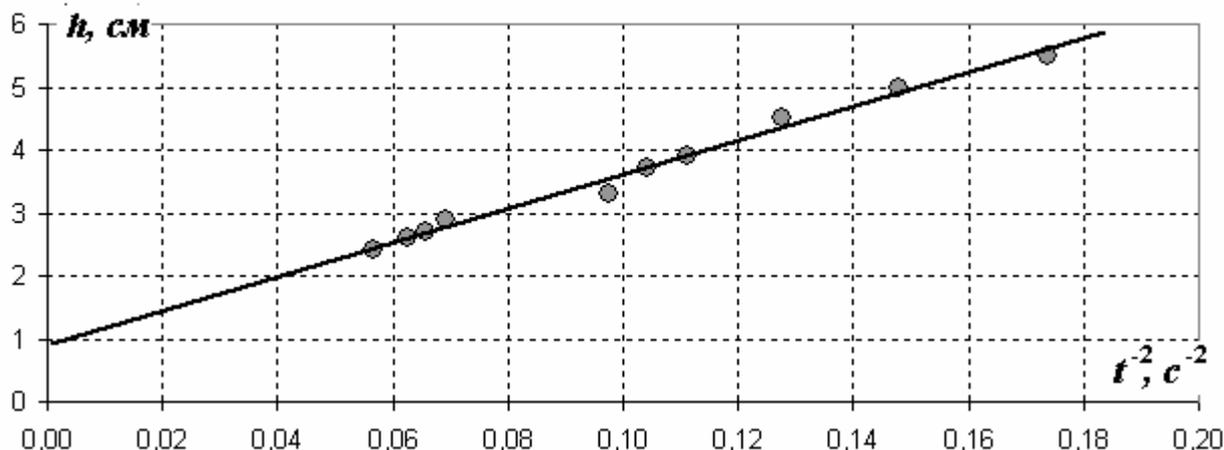
$$F_{\text{тр.}} = \frac{K}{R} N = \frac{K}{R} mg \cos \alpha \approx \frac{K}{R} mg \quad (3)$$

можно читать постоянной при различных углах. Конечная скорость легко определяется из законов кинематики: $v^2 = \frac{4S^2}{t^2}$. Из уравнений (2)-(3) следует:

$$h = \frac{4S^2}{g} \frac{1}{t^2} + \frac{F_{\text{тр.}} \cdot S}{mg} = \frac{4S^2}{g} \frac{1}{t^2} + \frac{KS}{R}. \quad (4)$$

Таким образом, линейаризация достигается, если рассмотреть зависимость высоты наклонной плоскости от величины обратной квадрату времени движения. График этой зависимости действительно оказывается линейным.

Линейаризация зависимости времени соскальзывания



Обработка зависимости $h = a \frac{1}{t^2} + b$ по МНК дает следующие значения параметров зависимости:

$$a = (27 \pm 2) \text{ см} \cdot \text{с}^2, \quad b = (0,9 \pm 0,2) \text{ см}.$$

Эти коэффициенты выражаются через искомые физические величины:

$$a = \frac{4S^2}{g}, \text{ поэтому } g = \frac{4S^2}{a} \approx \frac{4 \cdot 80^2}{27} \approx 948 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \Delta g = g \frac{\Delta a}{a} \approx 70 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$b = \frac{KS}{R}, \text{ отсюда определяем } K = b \frac{R}{S} \approx 0,9 \cdot \frac{0,76}{80} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \quad \Delta K = K \frac{\Delta b}{b} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Заметим, что относительные погрешности определения коэффициентов линейаризованной зависимости на порядок превышают погрешности измерения длины наклонной плоскости и радиуса трубки ($R = (0,76 \pm 0,05) \text{ см}$), поэтому последние не учитывались при расчетах погрешностей ускорения свободного падения и коэффициента трения. Кроме того, как обычно, погрешность определения параметра b заметно больше погрешности определения коэффициента наклона прямой.

Итак, окончательные результаты следующие:

$$g = (9,5 \pm 0,7) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad \varepsilon_g = 7\%; \quad K = (9 \pm 2) \cdot 10^{-5} \text{ м}, \quad \varepsilon_K = 22\%.$$

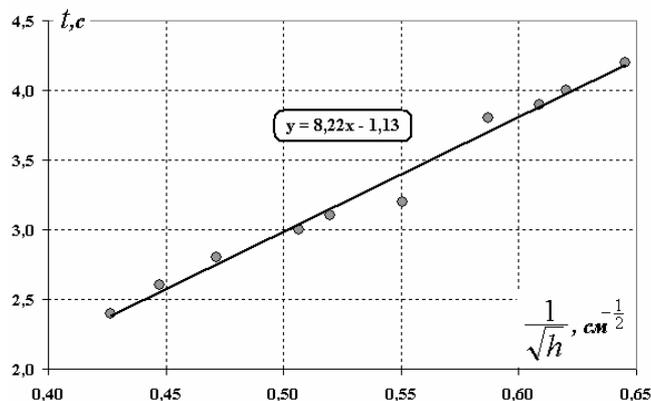
Небольшое дополнение.

Если не учитывать силу трения, то предпочтительнее анализировать зависимость (следующую из уравнения

$$(4): \quad t = \frac{2S}{\sqrt{gh}}, \text{ так как погрешность}$$

измерения времени заметно превышает погрешность измерения высоты наклонной плоскости.

Данная зависимость также близка к линейной, но наличие заметного свободного члена в ее уравнении однозначно свидетельствует о влиянии силы трения на скатывание трубки.



Задача 27. «Маятник Максвелла»

Нет необходимости приводить все численные данные, полученные при проведении измерений, так как, во-первых, они могут достаточно заметно отличаться для различного оборудования, во-вторых, методика выполнения этого задания аналогична предыдущим заданиям, посвященных изучению закона движения, в-третьих, рекомендовано выполнить эту работу самостоятельно. Поэтому ограничимся краткими комментариями, посвященными теоретическому описанию и качественным результатам измерений.

Теоретическое описание².

Движение маятника (без учета сопротивления воздуха) описывается с помощью основного уравнения динамики вращательного движения, записанного относительно мгновенной оси вращения,

$$I\beta = mgr, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{a}{r}$ - угловое ускорение вращения маятника, a - линейное

ускорение оси маятника, r - радиус оси, $I = \frac{mR^2}{2}$ - момент инерции

диска³. Из уравнения (1) следует, движение диска является равноускоренным с ускорением равным

$$a = 2g \left(\frac{r}{R} \right)^2. \quad (2)$$

Так радиус оси мал, по сравнению с радиусом диска, то ускорение оказывается малым, что дает возможность проводить измерения времени «вручную».

Для квадратной картонной пластинки момент инерции пропорционален квадрату длины стороны $I = \frac{1}{6}mb^2$. Поэтому его ускорение

$$a = 6g \left(\frac{r}{b} \right)^2, \quad (3)$$

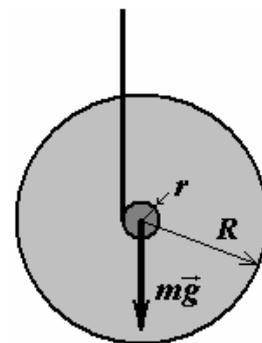
обратно пропорционально квадрату длины стороны. Интересно отметить, что время движения маятника с квадратной пластинкой $t = \sqrt{\frac{2L}{a}}$ прямо пропорционально длине стороны (а для диска пропорционально его радиусу).

1. По нашим измерениям, движение оси диска можно считать равноускоренным при его смещении на высоту порядка 50 см. Оптимальным обоснованием такого утверждения является линейность зависимости квадрата времени движения от высоты.

² Разрабатывать это теоретическое описание от учащихся в ходе выполнения работы не требуется, здесь оно приводится, что бы прояснить основные характеристики рассматриваемого движения.

³ Считаем, что радиус оси значительно меньше радиуса диска. Более точное значение момента инерции

$$I = \frac{mR^2}{2} + mr^2.$$



2. Коэффициент восстановления можно считать величиной постоянной для данного маятника. Заметим, что коэффициент восстановления во многом определяется упругостью нитей подвеса.
3. Для маятника с картонными квадратами, уже на расстояниях порядка 15-20 см сказывается влияние сил сопротивления воздуха. Если построить зависимость квадрата времени движения от пройденного пути, то эта зависимость линейна только на этом участке. Поэтому дальнейшие измерения ускорения следует проводить⁴ на высотах порядка 10-15 см.
4. Для определения ускорения необходимо измерить время раскручивания на этапе равноускоренного движения. Оказывается, что начальное ускорение действительно обратно пропорционально квадрату длины стороны картонки.

⁴ Таким образом, экспериментальная проверка закона движения оказывается необходимой, для того, чтобы определить область применимости модели равноускоренного движения.



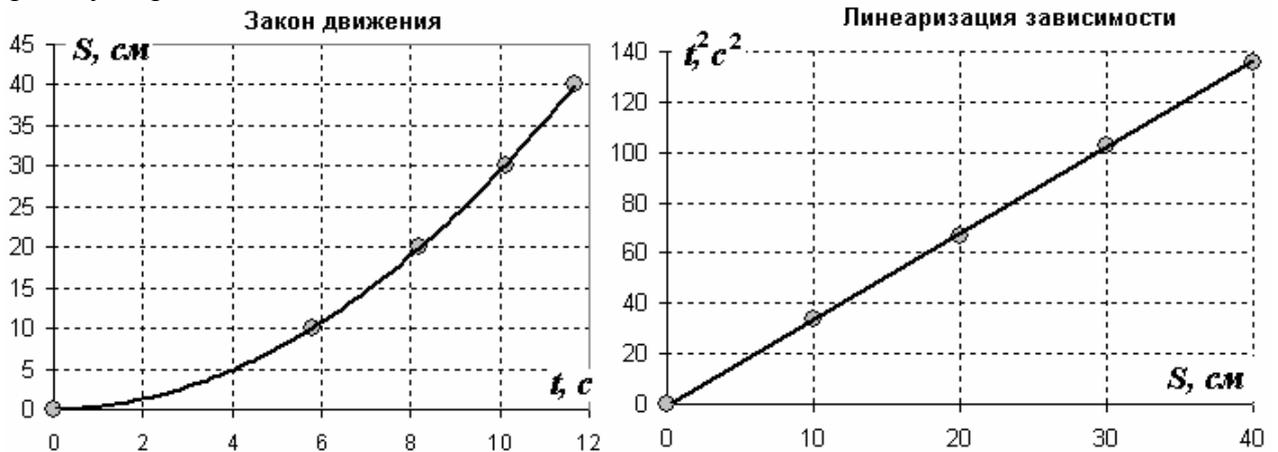
Задача 28. «Брахистохрона»

Часть 1. В таблице 1 приведены результаты измерения времени скатывания от пройденного пути.

Таблица 1.

$S, \text{ см}$	10	20	30	40
$t, \text{ с}$	5,79	8,17	10,15	11,66

График закона движения $S(t)$ и его традиционная линейризация (для равноускоренного движения) $t^2 = \frac{2}{a}S$ однозначно свидетельствуют, что движение является равноускоренным.



Параметры линейризованной зависимости $t^2 = kS + b$, рассчитанные по МНК, принимают значения:

параметр $b = (-0,4 \pm 3)c^2$ - обоснованно можно принять равным нулю (что свидетельствует о прямой пропорциональной зависимости);

значение коэффициента $k = (3,41 \pm 0,06) \frac{c^2}{\text{см}}$ позволяет найти ускорение оси диска

$a = \frac{2}{k} \approx 0,587 \frac{\text{см}}{c^2}$, $\Delta a = a \frac{\Delta k}{k} \approx 0,010 \frac{\text{см}}{c^2}$. Отметим малую погрешность определения ускорения в данном случае $\varepsilon = 2\%$.

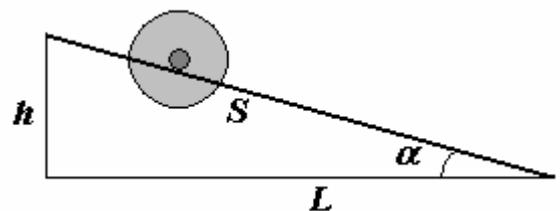
Часть 2.

При изменении разности высот начальной и конечной точек h , изменяется и путь, проходимый диском. Этот путь, а также синус угла наклона направляющих следует рассчитывать по формулам

$$S = \sqrt{L^2 + h^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{S}$$

(1)

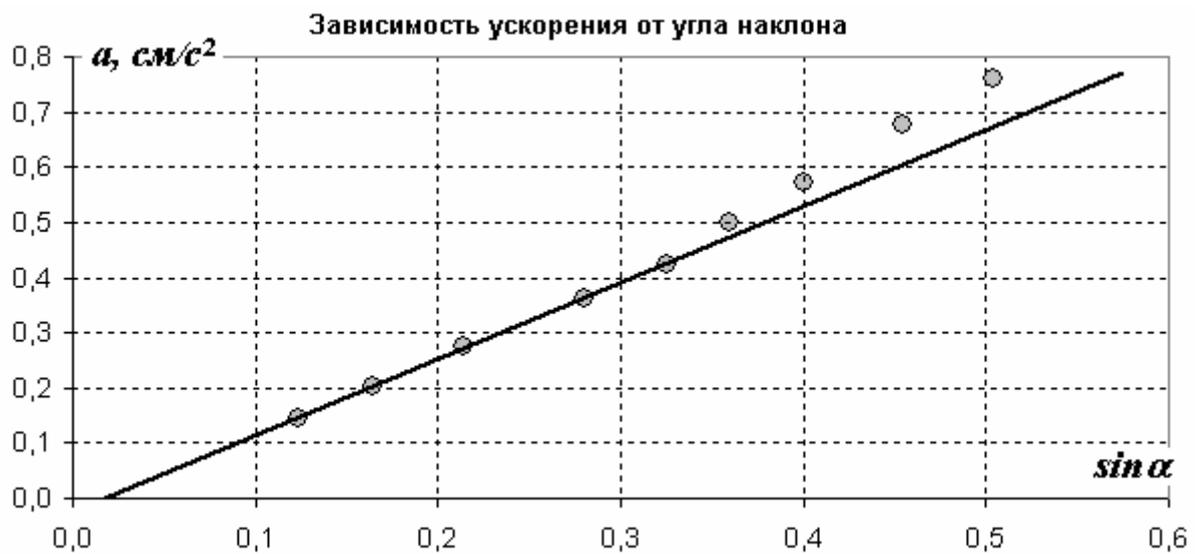


Результаты измерения времени скатывания при различных высотах h и фиксированном горизонтальном расстоянии между точками крепления $L = 48\text{ см}$, а также рассчитанные значения пути S , синуса угла наклона и ускорения $a = \frac{2S}{t^2}$, представлены в таблице 2.

Таблица 2.

$h, \text{ см}$	6,0	8,0	10,5	14,0	16,5	18,5	21,0	24,5	28,0	31,5
$t, \text{ с}$	25,83	21,99	18,90	16,64	15,47	14,36	13,53	12,63	12,10	11,15
$S, \text{ см}$	48,37	48,66	49,14	50,00	50,76	51,44	52,39	53,89	55,57	57,41
$\sin \alpha$	0,124	0,164	0,214	0,280	0,325	0,360	0,401	0,455	0,504	0,549
$a, \text{ см/с}^2$	0,145	0,201	0,275	0,361	0,424	0,499	0,572	0,676	0,759	0,924

График зависимости ускорения от синуса угла наклона направляющих показывает, что ускорение примерно пропорционально синусу угла наклона.



Объяснить полученную линейную зависимость не сложно. Рассмотрим вращение диска относительно оси вращения, проходящую через точку касания оси (это мгновенная ось вращения). Силой, момент которой отличен от нуля, является сила тяжести, плечо которой равно $d = r \sin \alpha$. Следовательно, угловое и линейное ускорение пропорционально синусу угла наклона направляющих.

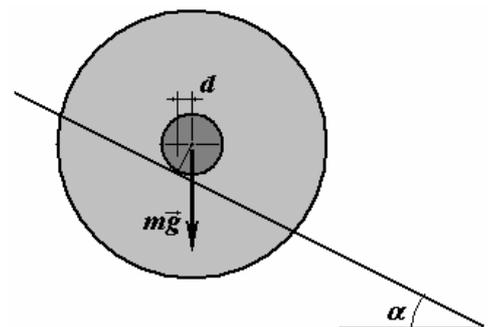
Можно получить и точную формулу для ускорения оси диска. На основании основного уравнения динамики вращательного движения запишем:

$$I \frac{a}{r} = mgr \sin \alpha .$$

Используя выражение для момента инерции диска (относительно мгновенной оси вращения)

$$I = \frac{mR^2}{2} + mr^2 \approx \frac{mR^2}{2}, \text{ получим выражение для ускорения}$$

$$a = 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 g \sin \alpha . \quad (3)$$



Внимательно посмотрим на экспериментальный график зависимости ускорения от синуса угла наклона – при увеличении угла наклона (когда синус превышает 0,35) точки начинают несколько отклоняться от прямо пропорциональной зависимости. Возможной причиной⁵ этого отклонения является незначительное проскальзывание оси по резиновым направляющим. Поэтому для определения коэффициента γ в формуле (1), приведенной в условии, в расчетах будем учитывать только первые пять точек. На рисунке проведена прямая именно по этим точкам. Расчет по МНК приводит к следующим значениям параметров зависимости $a = k \sin \alpha + b$:

$$b = (0,02 \pm 0,01) \frac{cM}{c^2} - \text{с некоторой натяжкой может быть принят равным нулю};$$

$$k = (1,39 \pm 0,04) \frac{cM}{c^2} \text{ позволяет определить требуемый безразмерный коэффициент}$$

$$\gamma = \frac{k}{g} = \frac{1,39}{981} \approx 1,41 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta\gamma = \gamma \frac{\Delta k}{k} \approx 3,6 \cdot 10^{-5}. \text{ Таким образом, окончательное значение}$$

искомого коэффициента равно

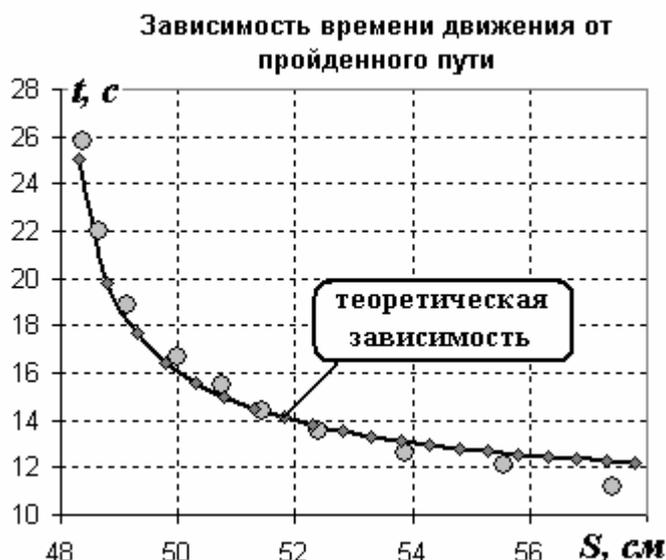
$$\gamma = (1,41 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}.$$

Отметим, что полученное значение вполне разумно, и соответствует тому, что радиус диска примерно в тридцать пять раз превышает радиус оси.

График зависимости времени движения от длины пройденного пути не совсем обычен – увеличение пути приводит к уменьшению времени скатывания. Это связано с увеличением ускорения. Легко получить теоретическое выражение для этой зависимости. При равноускоренном движении время движения описывается формулой

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2S}{\gamma g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2S^2}{\gamma g h}},$$

все параметры которой найдены. График этой функции построен на рисунке и демонстрирует хорошее соответствие экспериментальным данным.



Интересна зависимость времени движения от высоты h при фиксированном горизонтальном расстоянии L между начальной и конечной точками траектории

$$t = \sqrt{\frac{2S^2}{\gamma g h}} = \sqrt{\frac{2(h^2 + L^2)}{\gamma g h}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma g} \left(h + \frac{L^2}{h} \right)}.$$

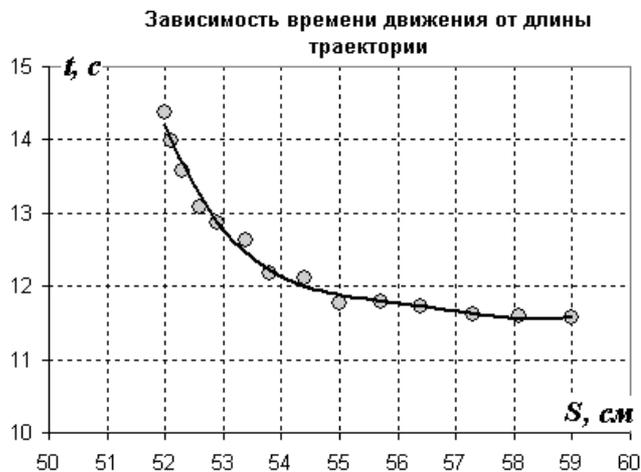
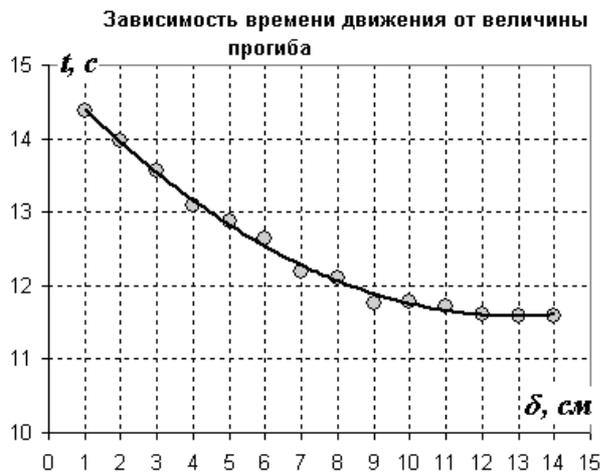
Эта функция имеет минимум при $h = L$, то есть при угле наклона в 45° к горизонту.

Часть 3.

В этой части также оказывается, что время скатывания уменьшается с увеличением прогиба (соответственно, и длины траектории). Основной причиной такого поведения является увеличение ускорения на первом участке траектории и как следствие увеличение

⁵ А, может, просто штатив упал, и его поставили на другое место. В любом случае, выбор диапазона для расчетов – прерогатива экспериментатора.

средней скорости на всем пути. Для примера приведем графики зависимостей времени движения от величины прогиба δ и длины траектории S , полученные при следующих значениях параметров установки $h = 18\text{ см}$, $L = 51\text{ см}$.





Задача 29. «Евангелиста Торричелли»

Выполнение экспериментальной части задания не вызывает никаких сложностей – если отверстие мало, то время вытекания составляет несколько десятков секунд, поэтому закон опускания уровня дна легко измеряется. В результате получается нелинейная зависимость - с уменьшением высоты уровня скорость вытекания замедляется.

Для определения зависимости скорости вытекающей воды от высоты ее уровня в стакане необходимо использовать полученную зависимость высоты уровня от времени $h(t)$. Скорость вытекающей жидкости связана с изменением объема воды в стакане очевидным соотношением

$$vs_0\Delta t = -\Delta V = -S\Delta h, \quad (1)$$

где s_0 - площадь отверстия, S - площадь поперечного сечения сосуда на высоте h . Из уравнения (1) следует, что скорость воды может быть рассчитана по формуле

$$v = \frac{S}{s_0} \frac{\Delta h}{\Delta t}. \quad (2)$$

Методика таких расчетов подробно рассмотрена при обсуждении Задачи 16.

Показатель степени может быть определен либо методом подбора, либо (что, естественно, предпочтительнее) с помощью обработки полученной зависимости в двойном логарифмическом масштабе.

При правильном выполнении работы значение этого показателя примерно равно $\gamma \approx \frac{1}{2}$.

Необязательное теоретическое дополнение.

Согласно известной формуле Торричелли скорость жидкости вытекающей из отверстия в сосуде зависит от высоты по закону

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Из этого закона следует (как решение уравнения 2), что зависимость высоты уровня воды от времени может быть представлена в «красивом» линеаризованном виде

$$\sqrt{\frac{h}{h_0}} = 1 - \frac{s_0}{S} \sqrt{\frac{gt^2}{2h_0}}, \quad (4)$$

Эта формула допускает простую проверку.

Также достаточно интересно осуществить поиск показателя степени по анализу зависимости $h(t)$, без ее численного дифференцирования. Впрочем, об этом подробно говорилось при решении задач 16 и 18. Попробуйте разработать такую методику самостоятельно, или внимательно разберитесь (а еще лучше сделайте самостоятельно) со следующей задачей.



Задача 30. «Формула Торричелли»

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Пусть начальная высота жидкости в сосуде h_0 , внутренний диаметр сосуда D , диаметр отверстия d (рис.1). В момент, когда высота жидкости в сосуде равна h , скорость вытекания жидкости из сосуда, согласно формуле Торричелли $v(h) = \sqrt{2gh}$.

Соответственно, за малый промежуток времени Δt из отверстия вытечет вода объемом (считаем, что в течение этого малого промежутка времени скорость вытекания остается постоянной величиной)

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4} v(h) \Delta t = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \Delta t.$$

Это вызовет понижение уровня воды в сосуде на величину

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2hg} \Delta t. \quad (1)$$

Используя выражение, приведенное в условии, вычислим приращение Δh как разность $h(t + \Delta t) - h(t)$ при условии $\Delta t \rightarrow 0$ (или просто вычислим производную):

$$\Delta h = h_0 ((1 - b(t + \Delta t))^2 - (1 - bt)^2) = 2h_0(1 - bt)b\Delta t. \quad (2)$$

Из формулы, приведенной в условии, найдем, что $(1 - bt) = \sqrt{\frac{h}{h_0}}$, с учетом чего (2)

преобразуется к виду

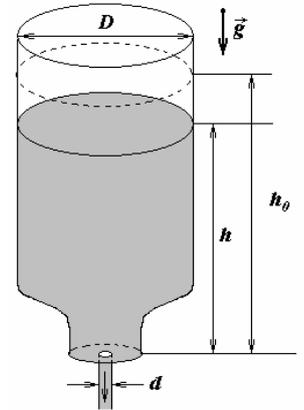
$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = 2h_0(1 - bt)b = 2h_0b\sqrt{\frac{h}{h_0}} = b\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\sqrt{2gh} = \{(1)\} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2hg}. \quad (3)$$

1.2 Из (3) следует выражение для коэффициента b через параметры установки

$$b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}}. \quad (4)$$

Из (4) следует важный вывод: для соблюдения постоянства коэффициента b следует проводить измерения только в цилиндрической части бутылки, т.е. до тех пор, пока вода не опустилась до сужающейся (нижней) части бутылки.

Обратите внимание, в данной задаче фактически предлагается исследовать закон движения – зависимость высоты уровня от времени, без последующих расчетов скорости! Тем самым удастся избежать крайне неприятной и «незаконной» операции вычисления отношений малых величин $v = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, приводящей к громадным погрешностям.



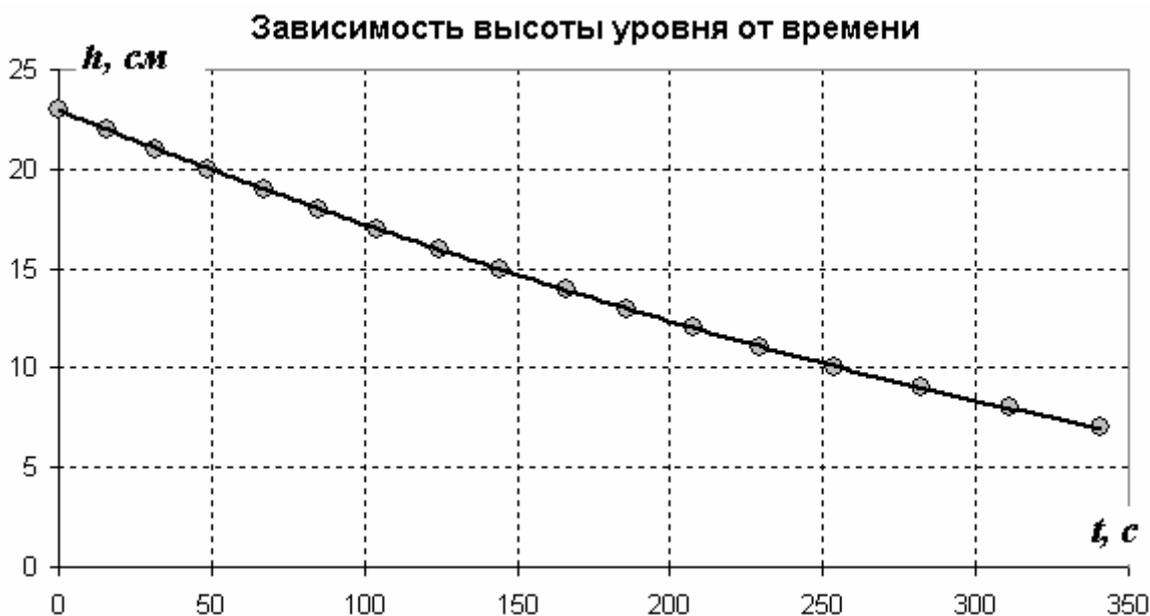
Часть 2. Закон вытекания.

2.1 В таблице приведены значения результатов трех измерений времен (а также их средние значения) вытекания данные для пластиковой бутылки объемом 1 литр при диаметре отверстия в пробке равном 1,6 мм.

Таблица 1.

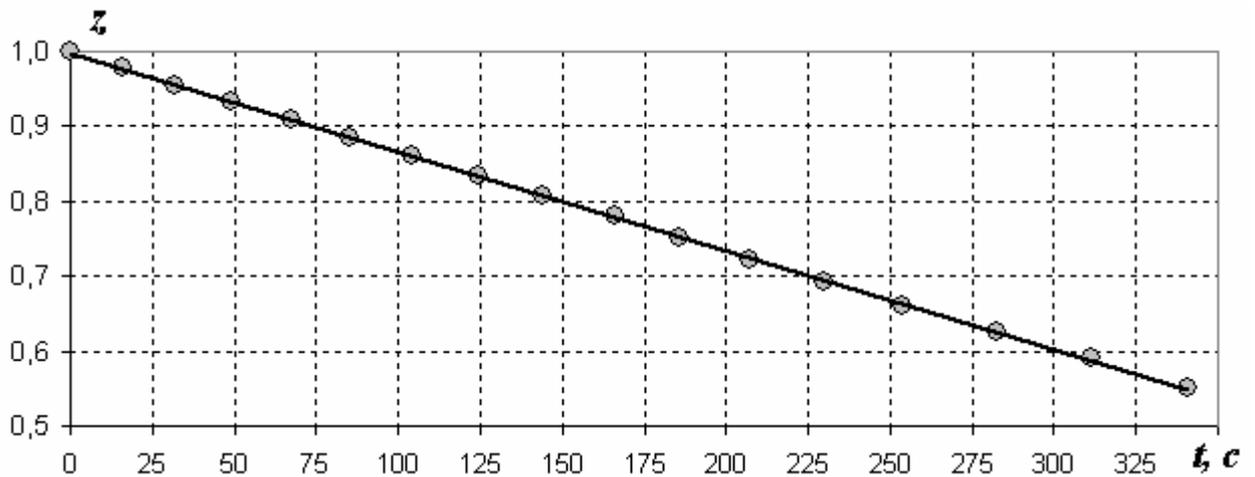
$h, \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_{\text{cp}}, \text{ с}$	$z = \sqrt{\frac{h}{h_0}}$
23	0			0	1,000
22	16	15	16	15,7	0,978
21	32	31	32	31,7	0,956
20	49	49	49	49,0	0,933
19	67	67	68	67,3	0,909
18	84	86	86	85,3	0,885
17	102	105	105	104,0	0,860
16	122	126	125	124,3	0,834
15	143	145	145	144,3	0,808
14	164	167	168	166,3	0,780
13	186	187	185	186,0	0,752
12	205	208	209	207,3	0,722
11	227	231	231	229,7	0,692
10	251	255	256	254,0	0,659
9	279	283	285	282,3	0,626
8	308	312	314	311,3	0,590
7	336	342	345	341,0	0,552

График полученной зависимости показан на рисунке.



2.2 Данная зависимость не линейна. Для проверки выполнимости формулы Торричелли ее следует линеаризовать. Как следует из формулы (2), приведенной в условии задачи, зависимость параметра $z = \sqrt{\frac{h}{h_0}}$ от времени должна быть линейна $z = \sqrt{\frac{h}{h_0}} = 1 - bt$.

График этой линеаризованной зависимости показан на следующем рисунке.



2.3 Можно рассчитать параметры этой зависимости по МНК. Но, как уже отмечалось ранее, предпочтительнее обрабатывать обратную зависимость – времени вытекания t от параметра z , так как последний измеряется с более высокой точностью:

$$t = \frac{1-z}{b}. \quad (5)$$

Параметры этой зависимости ($t = az + c$), рассчитанные по МНК, принимают значения $a = -(759 \pm 5)c$, $c = (757 \pm 4)c$.

Заметим, что эти параметры равны в пределах погрешности измерений, и имеют смысл времени полного вытекания, при условии, что бутылка имеет строго цилиндрическую форму (без горлышка). Соответственно, значение параметра b , входящего в формулу (2) условия равно

$$b = -\frac{1}{a} = 1,32 \cdot 10^{-3} c^{-1}, \quad \Delta b = b \frac{\Delta a}{a} = 9 \cdot 10^{-6} c^{-1}.$$

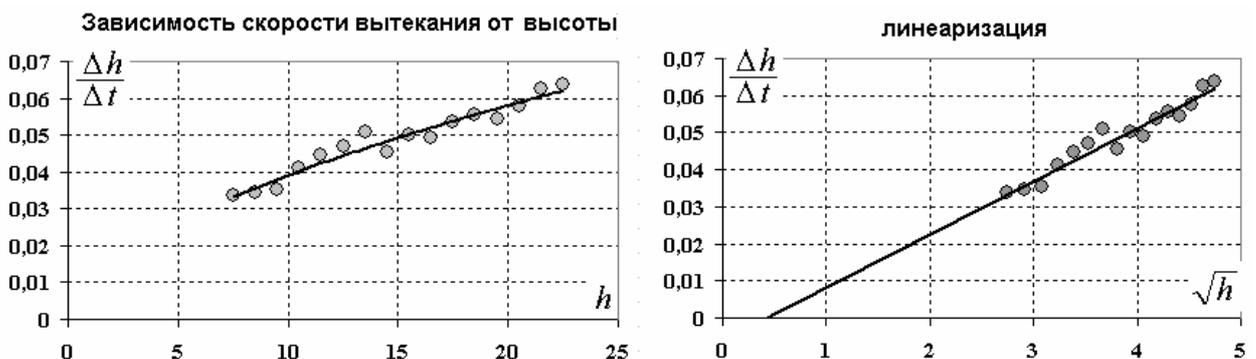
Теоретическое значение этого параметра равно (диаметр бутылки $D =$)

$$b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \approx 1,27 \cdot 10^{-3} c^{-1}$$

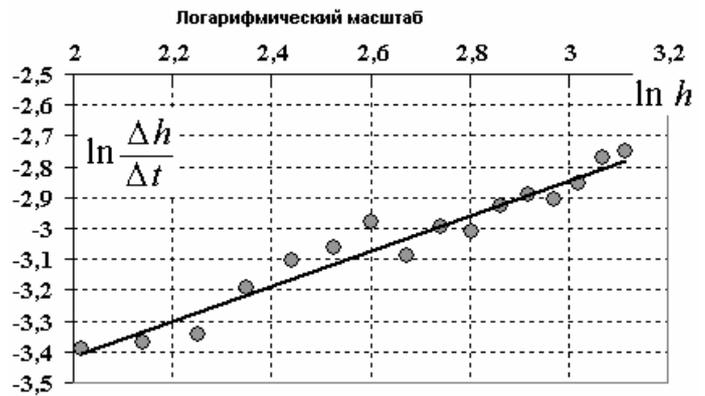
Таким образом, данный эксперимент подтверждает применимость формулы Торричелли не только качественно, но и количественно!

Ненужное дополнение.

Сравните результаты, полученные при обработке исходной экспериментальной зависимости, с графиками, полученными при вычислении скорости вытекания. Даже линеаризованная зависимость может считаться прямой только при наличии богатого воображения.



Мало помогает и обработка этой зависимости в логарифмическом масштабе – разброс точек очень велик. Правда, значение коэффициента наклона (равное показателю степени в исследуемой формуле) $\gamma = 0,57 \pm 0,07$ захватывает теоретическое значение $\gamma = \frac{1}{2}$



2.4. В качестве причин возможных отклонений следует назвать наличие у жидкости вязкости (внутреннего трения), возможное неламинарное течение (завихрений) при приближении уровня воды к отверстию, поверхностное натяжение жидкости.

Часть 3. Другие отверстия.

3.1 Как следует из полученных зависимостей, время τ вытекания обратно пропорционально значению коэффициента $b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}}$, который при прочих равных условиях прямо пропорционален квадрату диаметра отверстия. Отсюда следует, что

$$\tau \propto \frac{1}{d^2}.$$

Таки образом, отношение времен вытекания воды из бутылки при разных диаметрах отверстий определяется отношением обратных квадратов их радиусов

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \frac{1}{d_1^2} : \frac{1}{d_2^2} : \frac{1}{d_3^2}.$$

Соответственно, в нашем случае

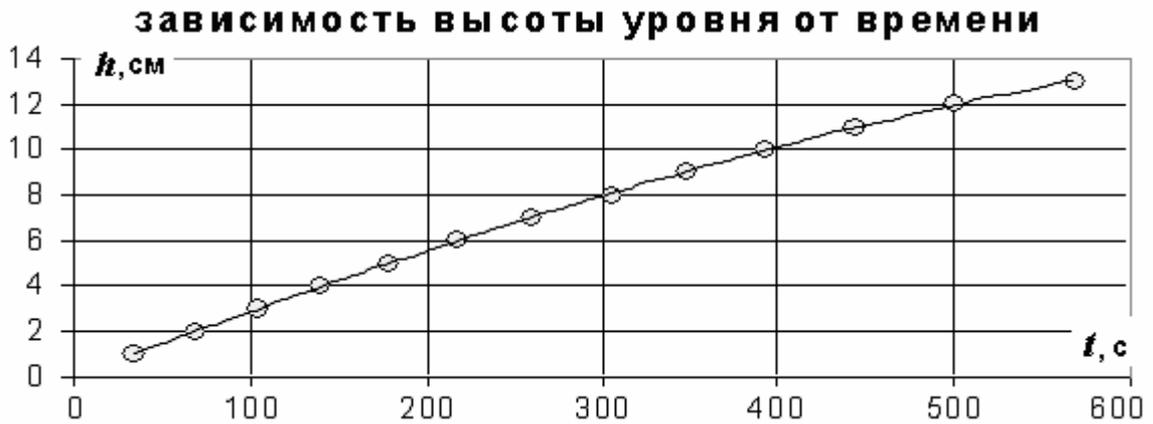
$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \frac{1}{1} : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} = 36 : 9 : 4.$$

С учетом погрешности эксперимент дает близкие значения.

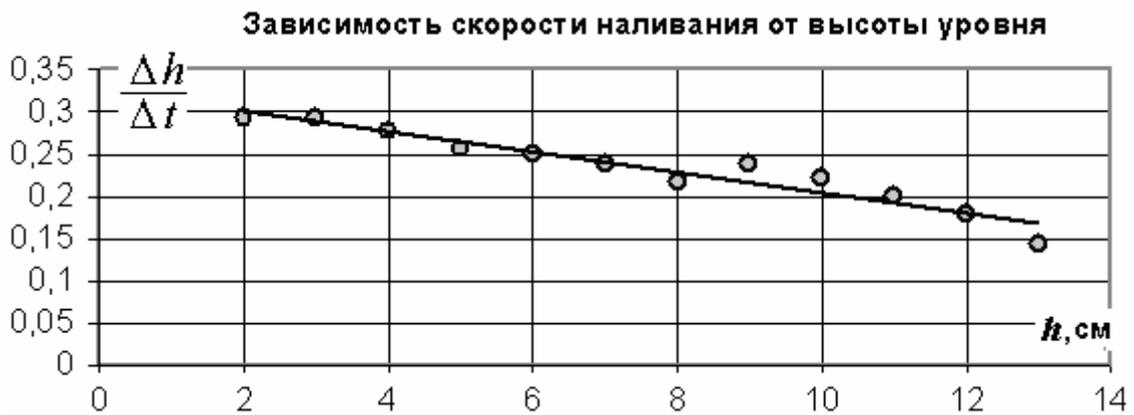


Задача 31. «Клепсидра»

На рисунке показан график зависимости высоты уровня воды в нижней бутылке от времени.



Как видно, эта зависимость не линейна – скорость изменения высоты уровня уменьшается. Эта зависимость может быть обработана по методике, описанной при выполнении задач 16 – особенно обратите внимание на методику обработки всей зависимости «целиком» – без использования малых разностей.



Отметим, что в данном случае скорость изменения уровня примерно пропорциональна разности давлений на концах трубки, то есть линейно зависит от разности высот уровней в верхней и нижней бутылках⁶, что подтверждает следующий график.

⁶ Напомним, что при вытекании через отверстие скорость вытекания пропорциональна корню из высоты уровня.



Задача 32. «Намокание ткани»

Описание методики проведения эксперимента фактически дано в условии задачи, поэтому здесь на нем останавливаться не будем.

Отметим только, что в данной задаче удобней фиксировать время, в течение которого граница намокания достигает определенной отметки.

Результаты измерения длины намокшей части S , см в зависимости от времени t , мин представлены в таблице и на рис. 1.

S , см	1	2	3	5	7	8	10	11	12	13	14
t , мин	1,5	3,5	5	8	12	15	21	26	31	37	48

В очередной раз мы сталкиваемся с нелинейной зависимостью координаты от времени. Причем хорошо заметно, что скорость распространения границы намокшей части убывает с течением времени. Разумно предположить, что в данном случае закон движения – «коренной», то есть скорость намокания пропорциональна корню из времени.

Экспериментальным подтверждением данного предположения служит вид графика. Можно дать и теоретическое обоснование этой гипотезы. Намокание – есть распространение воды по тонким волокнам-капиллярам ткани. При движении жидкости по тонкой трубке ее скорость (в соответствии с формулой Пуазейля) обратно пропорциональна длине заполненной части капилляра:

$v = \frac{a}{\sqrt{S}}$. Из этого соотношения следует, что величина S пропорциональна корню из времени.

Для проверки сделанного предположения следует построить линеаризованную зависимость $\sqrt{t} = F(S)$. График этой зависимости близок к линейному, что подтверждает применимость высказанного предположения.

Более подробное исследование этого процесса предлагаем провести самостоятельно – поверьте можно найти много интересного!





Задача 33. «Просто математический маятник»

1. Конечно, этот пункт задачи можно принять за шутку, но ... измеряли же средневековые математики площадь круга с помощью весов и тем самым определяли значение числа π . Сейчас мы обрели большой опыт экспериментальных исследований, почему бы экспериментально не проверить точность вычислений знаменитых математиков?

Используя методику, изложенную в задаче 3, проведем измерения на более серьезном оборудовании: увеличим длину маятника и диапазон ее изменения, используем более тяжелый груз, увеличим число измерений для повышения точности, привлечем учебно-вспомогательный персонал.

Тонкий прочный шнур (длиной более 2 метров) с тяжелым металлическим шаром подвешен на обрезке металлической трубы. Наматывая шнур на трубу можно изменять длину маятника. Из приведенной в условии формулы следует

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l = \frac{4\pi^2}{g} (l_0 - n\pi D) = \frac{4\pi^2 l_0}{g} - \frac{4\pi^3 D}{g} n, \quad (1)$$

где D - диаметр трубы, на которую наматывается шнур. Таким образом, квадрат периода линейно зависит от числа намотанных витков, а коэффициент наклона данной зависимости позволит рассчитать значение числа π .

Результаты измерений, полученные четырьмя начинающими физиками (Ф1-Ф4), усредненные значения периодов колебаний $\langle T \rangle$ и их квадратов приведены в таблице.

Таблица результатов измерений.

n	Время 20 колебаний (t_i, c)				$\langle T \rangle, c$	$\langle T \rangle^2, c^2$
	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4		
0	63,04	62,74	62,78	63,24	3,1475	9,907
1	61,23	61,12	61,46	61,21	3,0628	9,381
2	59,08	58,69	59,41	59,12	2,9537	8,724
3	57,05	57,00	57,09	56,98	2,8515	8,131
4	54,84	54,82	55,03	54,66	2,7419	7,518
5	52,24	52,23	52,37	52,72	2,6194	6,861
6	50,12	50,31	50,39	50,41	2,5154	6,327
7	47,53	47,54	47,56	47,57	2,3775	5,653
8	44,93	45,18	45,23	45,18	2,2564	5,092
9	41,91	42,11	42,40	42,31	2,1091	4,448
10	39,01	39,00	39,57	39,18	1,9594	3,839
11	35,90	35,74	36,21	35,78	1,7954	3,223
12	32,25	32,37	32,38	32,33	1,6167	2,614
13	28,29	28,03	28,48	28,48	1,4159	2,005

Диаметр использованной трубки был измерен с помощью штангенциркуля и оказался равным $D = (50,0 \pm 0,05) \text{ мм}$.



Построим график зависимости квадрата периода колебаний от числа намотанных витков. По МНК рассчитаем параметры этой линеаризованной зависимости

$T^2 = b - an$. полученные значения равны

$$a = (0,6111 \pm 0,0035)c^2$$

$$b = (9,952 \pm 0,026)c^2$$

Из функции (1) следует, что теоретическое значение коэффициента наклона равно

$$a = \frac{4\pi^3 D}{g}, \text{ следовательно,}$$

$$\tilde{\pi} = \sqrt[3]{\frac{ag}{4D}}, \text{ с погрешностью } \Delta\pi = \tilde{\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{3} \frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \frac{\Delta D}{D}\right)^2}. \text{ Расчеты по этим формулам}$$

приводят к результату

$$\tilde{\pi} = 3,106 \pm 0,012.$$

Как видите, математики достаточно точно сумели вычислить значение числа π , результаты их многовековых вычислений дали значение очень близкое к значению полученному экспериментально.

2. Здесь нам предстоит исправить ошибку великого Г. Галилея, который считал, что период колебаний математического маятника не зависит от амплитуды его колебаний. Правда, он изучал колебания подвесных светильников в соборе, а в качестве измерителя времени использовал собственный пульс. Жаль, что наше открытие не будет оригинальным - ошибку Галилея исправил еще в XVII веке Х. Гюйгенс, который не только получил правильный результат для математического маятника, но и изобрел циклоидальный маятник, период колебаний которого действительно не зависит от амплитуды. Но это уже тема для последующих экспериментальных задач.

Рекомендуем провести измерения зависимости периода колебаний математического маятника от амплитуды самостоятельно. Отметим, что теоретическое значение искомого коэффициента в формуле (2) условия равно $\chi = \frac{1}{16}$. Еще раз

подчеркнем, что измерения необходимо проводить очень тщательно, так как период изменяется очень незначительно – например, при амплитуде колебаний в 90° он возрастает всего на 15%.





Задача 34. «Двойной маятник»

Если считать, что применима формула для периода колебаний математического маятника, то зависимость периода от положения центрального груза должна иметь вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L+x}{2g}}, \quad (1)$$

здесь $l = \frac{L+x}{2}$ - расстояние от точки подвеса до центра масс системы.

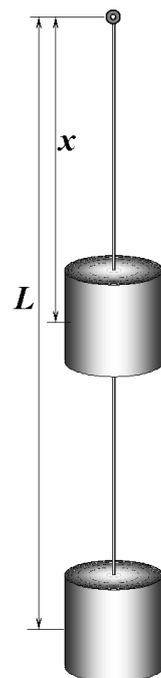
Однако этот маятник является физическим, поэтому его период должен рассчитываться по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(L^2 + x^2)}{2mg \frac{L+x}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + x^2}{g(L+x)}}, \quad (2)$$

где $J = m(L^2 + x^2)$ - момент инерции маятника.

Как и в случае колебаний стержня, зависимость (2) не является монотонной, а имеет точку минимума.

Проведение измерений не вызывает затруднений, результаты хорошо подтверждают справедливость формулы (2).





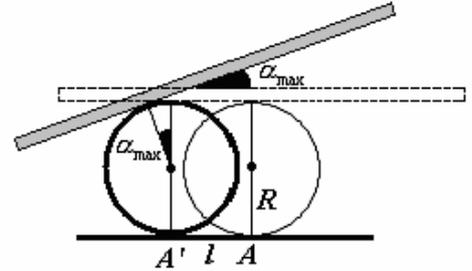
Задача 35. «Линейка на цилиндрах»

Задание 1. Измерение коэффициентов трения.

Предельный угол наклона линейки на боковой поверхности α_{\max} , при котором линейка еще остается в равновесии, удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu.$$

Для измерения этого угла удобно применить следующую методику. Расположить линейку на цилиндре в равновесии в горизонтальном положении, затем, медленно перекачивая цилиндр по горизонтальной поверхности, определить смещение его точки касания $|A'A| = l$ до того момента пока линейка не начнет соскальзывать с цилиндра. Как следует из рисунка 1, максимальный угол наклона линейки равен $\alpha_{\max} = \frac{l}{R} = \frac{2l}{D}$, где D - диаметр цилиндра.



Задание 2. Изучение зависимости периода колебаний от радиуса опоры.

Теоретическое введение.

Вывод формулы для периода колебаний линейки на цилиндре является интересной теоретической задачей. Но эта книга посвящена экспериментальным исследованиям, поэтому ограничимся только конечным результатом – формулой для периода колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{3}\right)}{g\left(R - \frac{h}{2}\right)}}, \quad (1)$$

где L - длина линейки, h - ее толщина, R - радиус цилиндра. Формула получена при условии, что движение линейки по цилиндру происходит без проскальзывания, а колебания являются малыми. Заметьте, что колебания возможны, если толщина линейки не превышает диаметра цилиндра. Попробуйте заставить колебаться линейку на иголке!

Обычно толщина линейки значительно меньше ее длины $h \ll L$, поэтому формула (1) упрощается

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{3}\right)}{g\left(R - \frac{h}{2}\right)}} \approx \frac{\pi L}{\sqrt{3g\left(R - \frac{h}{2}\right)}}. \quad (2)$$

Экспериментальная проверка этой формулы составляет содержания задания 2.

Если же толщина линейки значительно меньше радиуса цилиндра, то допустимо дальнейшее упрощение

$$T = \frac{\pi L}{\sqrt{3g\left(R - \frac{h}{2}\right)}} \approx \frac{\pi L}{\sqrt{3gR}}. \quad (3)$$

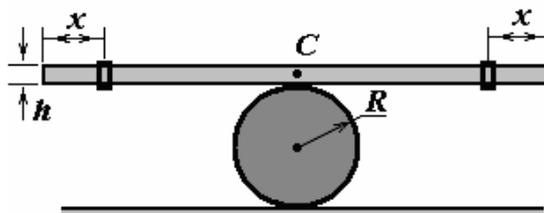
В этом случае период колебаний обратно пропорционален радиусу цилиндра, то есть искомый показатель степени равен $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Проведение измерений не вызывает затруднений (периоды колебаний порядка 1 с, что легко измеримо), экспериментальное значение показателя степени оказывается близким к его теоретическому значению.

Задание 3. Изучение зависимости периода колебаний от положения металлических петель.

Теоретическое введение. Можно получить точную формулу для периода малых колебаний и в данной системе:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{mL^2}{12} + 2m_1\left(\frac{L}{2} - x\right)^2\right)}{(m + 2m_1)g\left(R - \frac{h}{2}\right)}}, \quad (4)$$



а его отношение к периоду колебаний без металлических петель будет равно (при разумных допущениях типа $m_1 < m$)

$$\frac{T}{T_0} \approx \sqrt{1 + 24 \frac{m_1}{mL^2} \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}. \quad (5)$$

Экспериментальная проверка этой формулы проводится традиционными методами: проведение измерений, затем линеаризация полученной зависимости и ее обработка по МНК. Как ни удивительно, эта и формула подтверждается экспериментально.

Для измерений удобно выбирать цилиндр среднего размера, где колебания достаточно долго не затухают, а их период легко поддается измерениям.



Задача 36. «Связанные одной нитью...»

Часть 1. Резонанс.

Так как длина тяжелого маятника остается неизменной, то и частота его колебаний не изменяется. Изменение длины легкого маятника приводит к изменению собственной частоты его колебаний. При сближении частот вынуждающей силы (то есть частоты колебаний тяжелого маятника) и частоты собственных колебаний амплитуда вынужденных колебаний возрастает, возникает резонанс. В данной системе этот резонанс отчетливо наблюдается – требуемая зависимость имеет ярко выраженный максимум.

Вынуждены признать, что результаты носят качественный характер, провести численное сравнение с теоретической резонансной кривой затруднительно, велики погрешности измерений.

Обнаружить резонанс на частоте вынуждающей силы, равной половине собственной частоты, затруднительно, но возможно, особенно в спокойных домашних условиях!

Часть 2. «Биения»

Эта часть задачи может быть выполнена «до конца». Известно, что частота биений равна разности собственных частот колебаний связанных маятников. Этот факт позволяет получить теоретическую зависимость периода биений от длины одного маятника l_1 при фиксированной длине второго l_0 . Так частота колебаний математического маятника определяется формулой

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

следовательно, частота биений равна

$$\nu_{\text{биен.}} = |\nu_0 - \nu_1| = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{l_0}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}} \right| = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_0}} \left| 1 - \sqrt{\frac{l_0}{l_1}} \right|.$$

Наконец, измеряемый период биений описывается формулой

$$T_{\text{биен.}} = \frac{1}{\nu_{\text{биен.}}} = \frac{T_0}{\left| 1 - \sqrt{\frac{l_0}{l_1}} \right|}. \quad (1)$$

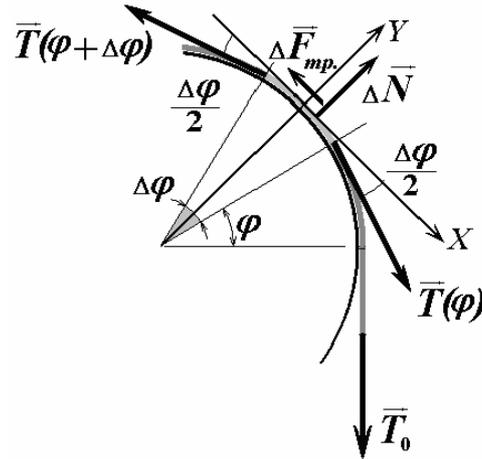
Формула слишком красива, что бы не подвергнуть ее экспериментальной проверке. Ее линеаризация также оригинальна: следует проверить зависимость в безразмерных параметрах:

$$\frac{T_0}{T_{\text{биен.}}} = \left| 1 - \sqrt{\frac{l_0}{l_1}} \right|. \quad (2)$$

Заметим, что и секундомер в данном эксперименте не обязателен, можно измерять период биений в периодах колебаний маятника неизменной длины.



Задача 37. «Где нормальная реакция?»



1. Сила натяжения нити направлена вдоль нити, поэтому в любой точке по касательной к поверхности цилиндра. Что бы «найти» силу нормальной реакции, необходимо рассмотреть силы, действующие на небольшой участок нити, видимый из центра под малым углом $\Delta\varphi$. Силы натяжения, действующие на концы этого выделенного участка, направлены под углом друг к другу и именно радиальные составляющие этих сил прижимают нить к поверхности, приводят к появлению силы нормальной реакции и, следовательно, к возникновению силы трения. С другой стороны, возникшая сила трения приводит к тому к уменьшению силы натяжения нити. Таким образом, возникает обратная связь – сила натяжения определяет силу трения, а та влияет на изменение силы натяжения. Причем уменьшение силы натяжения на малом участке пропорционально самой силе натяжения, что и приводит к экспоненциальной зависимости силы натяжения от угла намотки.

Приведем строгий вывод формулы Эйлера (от школьников требовать этот вывод рановато)

Будем считать, что груз опускается. Пусть в начальной точке касания нити поверхности сила натяжения известна и равна T_0 (эта сила обусловлена подвешенным грузом). Угол намотки φ будем отсчитывать от этой точки. Введем систему координат, привязанную к выделенному участку нити, ось Oy направим радиально (нормально к участку), а ось Ox по касательной к нему. Так как мы считаем, что нить движется без ускорения (или можно пренебречь массой нити), то сумма сил, действующих на выделенный участок, равна нулю. Это условие равновесия позволяет записать два уравнения:

в проекции на ось Oy :

$$\Delta N = T(\varphi)\sin\frac{\Delta\varphi}{2} + T(\varphi + \Delta\varphi)\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx T(\varphi)\Delta\varphi, \quad (1)$$

здесь учтено, что угол $\Delta\varphi$ мал, поэтому его синус равен самому углу, кроме того, можно пренебречь в различиях сил натяжения на концах выделенного участка $T(\varphi) \approx T(\varphi + \Delta\varphi)$;
в проекции на ось Ox :

$$T(\varphi)\cos\frac{\Delta\varphi}{2} - T(\varphi + \Delta\varphi)\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = \mu\Delta N, \quad (2)$$

так как угол мал, его косинус следует считать равным 1. Из уравнений (1)-(2) следует уравнение для определения зависимости натяжения нити от угла намотки

$$T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) = -\mu T(\varphi)\Delta\varphi,$$

или

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\mu T \quad (3)$$

решением этого уравнения при оговоренном условии и является приведенная формула

$$T = T_0 \exp(-\mu\varphi).$$

2. Самое важное при выполнении данного задания понять, что сила натяжения больше, чем сила тяжести, поэтому теоретическая зависимость должна иметь вид

$$T = T_0 \exp(+\mu\varphi). \quad (4)$$

Точность измерений зависит от качества динамометра, но в результате получаются достаточно гладкие зависимости. При правильном подборе нити и стержня удастся снять 6-7 точек (полтора – два оборота). Больше количество точек удастся получить при меньшей массе подвешенного груза.

3. Для подтверждения справедливости приведенной формулы следует построить зависимость логарифма силы натяжения от угла намотки. Более того, зависимости $\ln \frac{T(\varphi)}{T_0}$

от φ оказываются практически одинаковыми для всех масс подвешенных грузов. Коэффициент наклона этих зависимостей равен коэффициенту трения нити о поверхность стержня. Типичные значения этого коэффициента порядка 0,1 и не зависят от массы повешенного груза.

4. При опускании груза нить движется в противоположном направлении. Поэтому в этом случае сила натяжения нити оказывается меньше силы тяжести из-за действия силы трения, в этом случае в показателе экспоненты следует брать знак минус. Больше число измерений удастся провести при максимальной массе груза. И в этом случае приведенная формула подтверждается.



Задача 38. «Явление застоя»

Данная задача слишком оригинальна для того, чтобы ограничиться только краткими указаниями, поэтому обсудим ее выполнение подробно.

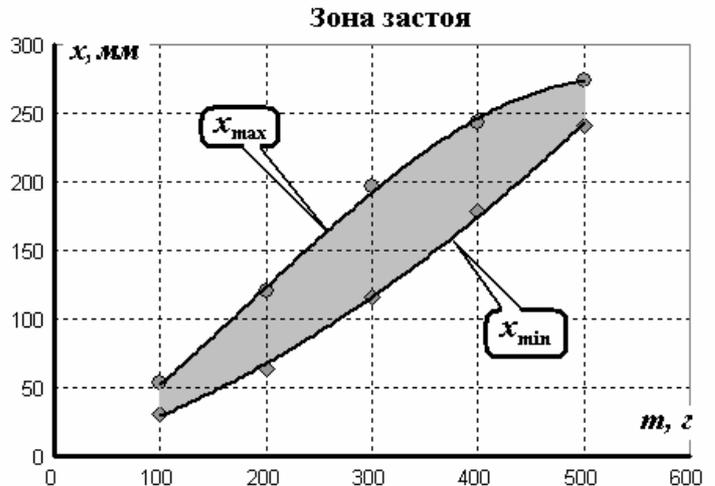
Часть 1. «Статика»

Начнем с результатов измерений, которые представлены в Таблице 1 и на графике, где x_{\min} и x_{\max} - минимальное и максимальное значение деформации резинки, при которых система остается в равновесии, при массе груза m .

На графике выделена зона застоя.

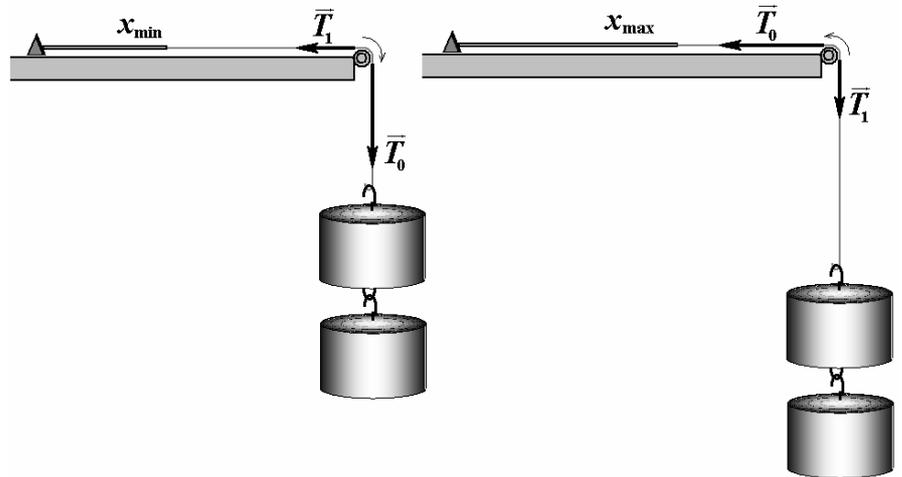
Таблица 1.

m , Г	x_{\min} , мм	x_{\max} , мм
100	31	53
200	64	120
300	116	197
400	178	243
500	241	243



Теперь нам необходимо математически описать условия равновесия груза.

Для определения минимального растяжения мы должны медленно опускать грузы. В этом случае сила трения покоя будет помогать удерживать грузы (уравновешивать силу тяжести). В положении равновесия сила натяжения вертикальной части нити равна силе тяжести $T_0 = mg$; а



уменьшенная трением сила натяжение горизонтального участка равна силе упругости (будем считать, что закон Гука справедлив): $T_1 = \beta T_0 = kx_{\min}$.

Из этих уравнений находим зависимость минимальной деформации резинки от массы подвешенного груза

$$x_{\min} = \beta \frac{mg}{k}. \quad (1)$$

Для определения максимальной деформации грузы медленно приподнимают, поэтому изменяется направление действия сил трения (сейчас эта сила помогает удерживать резинку в растянутом состоянии). Следовательно, сила натяжения

горизонтального участка уравнивает силу натяжения максимально растянутой резинки $T_0 = kx_{\min}$, а уменьшенная трением сила натяжения вертикального участка уравнивается силой тяжести, поэтому $T_1 = \beta T_0 = mg$. Следовательно, зависимость максимальной деформации резинки от массы подвешенного груза имеет вид

$$x_{\max} = \frac{1}{\beta} \frac{mg}{k}. \quad (2)$$

Таким образом, и минимальная и максимальная деформации резинки должны быть прямо пропорциональны массе подвешенного груза. Обратимся еще раз экспериментальному графику. Можно считать, что деформаций порядка 200 мм обе зависимости примерно линейны (или их можно так аппроксимировать). Построим эти зависимости и определим их параметры по МНК. Для минимального растяжения зависимость имеет вид

$$x_{\min} = a_1 m + b_1,$$

со следующими значениями коэффициентов

$$a_1 = (0,49 \pm 0,09) \frac{\text{мм}}{\text{г}}; \quad b_1 = (-26 \pm 25) \text{мм};$$

для максимального растяжения

$$x_{\max} = a_2 m + b_2,$$

с коэффициентами

$$a_2 = (0,72 \pm 0,06) \frac{\text{мм}}{\text{г}}; \quad b_2 = (-21 \pm 13) \text{мм}.$$

Точность не велика, потому что экспериментальных точек не много (четыре для первой и всего три для второй) - но не мы же виноваты, что в стандартный набор входит всего шесть грузов, а распиливать их не разрешают. Тем не менее, пусть и с погрешностью в 20% значения коэффициентов наклона мы получили. Свободные члены отличны от нуля (об их погрешности лучше не говорить), по-видимому, линейка оказалась сдвинута миллиметров на 20 - учтем далее, как поправку⁷ к деформации $\delta x = 22 \text{мм}$.

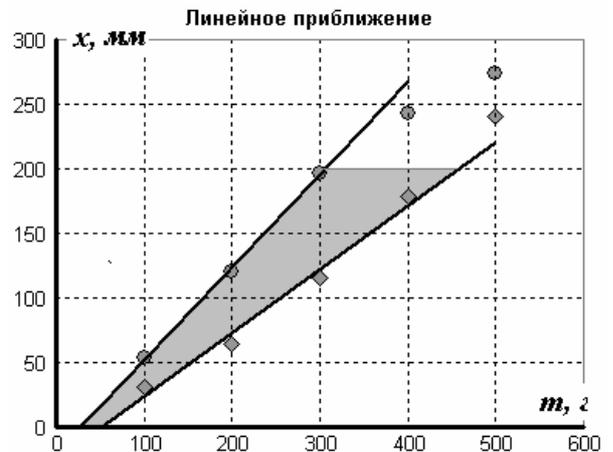
Коэффициент β выразим из явных выражений для коэффициентов наклона, следующих из формул (1) и (2):

$$\begin{cases} a_1 = \beta \frac{g}{k} \\ a_2 = \frac{1}{\beta} \frac{g}{k} \end{cases} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}. \quad (3)$$

Подсчет по этой формуле приводит к численному значению

$$\beta = 0,83 \pm 0,17 \quad (4)$$

Отметим, что, используя формулу для этого параметра, исследованную в предыдущей задаче $\beta = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\mu\right)$, можно определить коэффициент трения нити о стержень $\mu = -\frac{2}{\pi} \ln \beta \approx 0,12$.

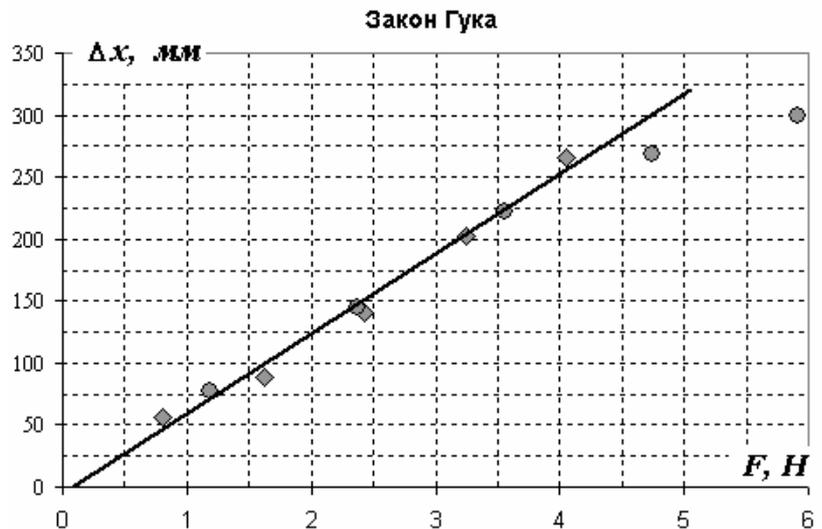


⁷ Это значение найдено, как результат усреднения параметров b с учетом их различной погрешности.

Теперь, зная коэффициент β , можно рассчитать значения сил упругости при различных деформациях пружинки. Так, при измерениях минимальных растяжений сила упругости равнялась $F_{упр.} = \beta mg$, а при максимальных - $F_{упр.} = \frac{1}{\beta} mg$. Пересчитаем данные Таблицы 1 по этим формулам (Таблица 2) и построим «объединенный» график зависимости деформации от силы упругости.

Таблица 2.

	$F_{упр.},$ Н	$\Delta x,$ мм
$F_{упр.} = \beta mg,$ $\Delta x = x_{мин} + \delta x$	0,81	53
	1,62	86
	2,43	138
	3,24	200
	4,05	263
$F_{упр.} = \frac{1}{\beta} mg,$ $\Delta x = x_{макс} + \delta x$	1,18	75
	2,37	142
	3,55	219
	4,74	265
	5,92	296



Как видим, точки действительно легли на одну прямую (за исключением двух последних, для которых закон Гука – «не закон»).

Параметры этой зависимости $\Delta x = AF + B$, рассчитанные по МНК, равны

$$A = (64 \pm 6) \frac{\text{мм}}{\text{Н}}; \quad B = (-8 \pm 15) \text{мм}.$$

Так как точки легли на прямую прямой пропорциональности (значение сдвига B обосновано может быть принято равным нулю), то для деформаций резинки до 250 мм закон Гука выполняется. Жесткость резинки $k = \frac{1}{A}$, ее численное значение

$$k = (15,6 \pm 1,5) \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Заметьте, объединение точек позволило снизить погрешность определения жесткости до 10%.

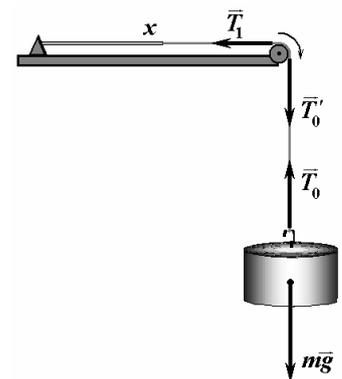
Часть 2. «Динамика»

Груз всегда останавливается в зоне застоя. При наличии достаточной энергии он может проскочить зону застоя и начать обратное движение. Этим объясняется наличие разрывов в графиках зависимостей конечного положения груза от его начальной координаты.

Решение этой части задачи начнем с теоретического анализа движения груза, которое описывается уравнением второго закона Ньютона (груз опускается):

$$ma = mg - T_0. \quad (5)$$

Силы натяжения с разных сторон блока связаны соотношением $T_1 = \beta T_0$, а натяжение горизонтальной части нити равно силе упругости резинки (полагаем, что закон Гука справедлив): $T_1 = kx$.



Таким образом, уравнения движения груза (5) приобретает вид

$$ma = mg - \frac{k}{\beta}x. \quad (6)$$

Но это есть уравнение гармонических колебаний

$$a = -\frac{k}{\beta m} \left(x - \beta \frac{mg}{k} \right) = -\frac{k}{\beta m} (x - x_{\min}). \quad (6)$$

с положением равновесия, смещенным на величину $\beta \frac{mg}{k} = x_{\min}$, совпадающую с минимальной границей зоны застоя. Решением этого уравнения является гармоническая функция, которая нас, экспериментаторов не интересует, так как экспериментально исследуется толь зависимость конечного положения груза от начального. Важно, что точка первой остановки будет находиться на таком же расстоянии от положения равновесия, как и начальная точка, только с другой стороны.

Аналогично можно показать, что при движении груза вверх уравнение движения будет иметь вид

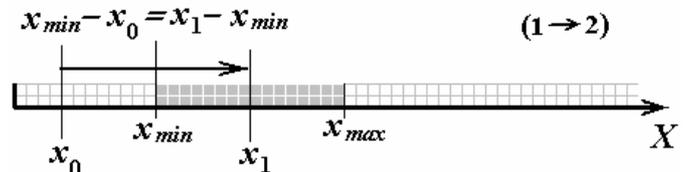
$$a = -\frac{\beta k}{m} \left(x - \frac{mg}{\beta k} \right) = -\frac{\beta k}{m} (x - x_{\max}). \quad (7)$$

Отметим, интересный факт – частоты колебаний различны для различных направлений движения.

При движении вверх расстояние между точкой первой остановки и верхней границей зоны застоя равно расстоянию от этой границы до начальной точки (которая, естественно должна находится за этой границей).

Теперь мы можем проанализировать искомую зависимость. Нам необходимо рассмотреть несколько участков начальной деформации резинки (или положения груза, что равносильно). Ниже построен итоговый график зависимости координаты конечного положения груза x_1 от координаты его начального положения x_0 . По ходу рассмотрения мы будем последовательно строить участки этого графика.

(1-2) Пусть начальная координата меньше координаты минимальной границы зоны застоя $x_0 < x_{\min}$. В этом случае сила тяжести превышает силу упругости (даже с учетом трения), поэтому груз начнет опускаться (резинка растягиваться). Координата первой и окончательной⁸ остановки удовлетворяет оговоренному выше условию



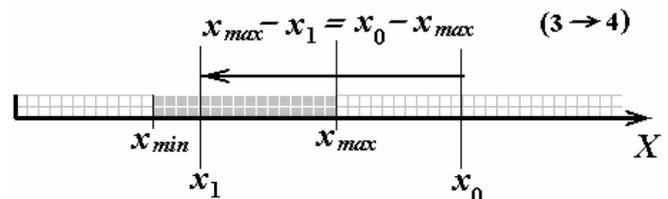
$$x_1 - x_{\min} = x_{\min} - x_0,$$

из которого следует, что

$$x_1 = 2x_{\min} - x_0. \quad (8)$$

(2-3) Если начальная точка находится в зоне застоя, то движение не начнется, поэтому конечное положение попросту будет совпадать с начальным.

(3-4) Когда начальная точка лежит за границей зоны застоя $x_0 > x_{\max}$, резинка начнет сжиматься, поднимая груз. В этом случае движение описывается



⁸ Мы рассматриваем случай, когда координата нижней границы меньше ширины зоны застоя $x_{\min} < x_{\max} - x_{\min}$. В этом случае первая остановка попадает в зону застоя. В том случае, когда $x_{\min} > x_{\max} - x_{\min}$, возможно, что система проскочит зону покоя. Но в наших экспериментах этот вариант не встретился, поэтому можете проанализировать его самостоятельно.

уравнением (7), а для координаты точки первой остановки справедливо соотношение

$$x_{\max} - x_1 = x_0 - x_{\max} ,$$

из которого находим

$$x_1 = 2x_{\max} - x_0 . \quad (9)$$

Эта формула будет описывать конечное положение, если оно окажется в зоне застоя, то есть при

$$x_1 = 2x_{\max} - x_0 > x_{\min} , \Rightarrow x_0 < 2x_{\max} + x_{\min} .$$

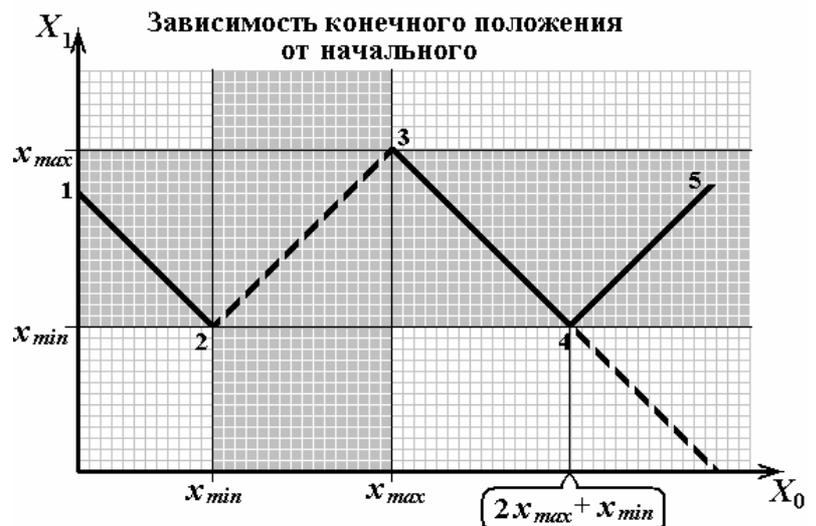
(4-5) Если же начальное положение лежит за пределами этой области, то система проскочит зону застоя и начнет обратное движение. Координата первой остановки удовлетворяет формуле (9). Но, так как эта точка вышла из зоны застоя, то точка продолжит движение в обратном направлении, координата второй остановки удовлетворяет соотношению, аналогичному формуле (8): $x_2 = 2x_{\min} - x_1$. Подставляя из формулы (9) значение x_1 , получим выражение для координаты второй (надеемся окончательной) остановки:

$$x_2 = 2x_{\min} - x_1 = x_0 - 2(x_{\max} - x_{\min}) . \quad (10)$$

На этом мы закончим теоретический анализ, не смотря на то, что еще не все варианты рассмотрены. Например, если координата первой остановки оказалась отрицательной, то, как будет реагировать на это резинка? Мы же считаем, что и в этом случае справедлив закон Гука, т. е. резинка начнет «толкаться».

Посмотрите на итоговый график и разрывную функцию, его описывающую (объединим все полученные выражения).

$$x_1 = \begin{cases} 2x_{\min} - x_0, & x_0 < x_{\min} \\ x_0, & x_{\min} < x_0 < x_{\max} \\ 2x_{\min} - x_0, & x_{\max} < x_0 < 2x_{\max} + x_{\min} \\ x_0 - 2(x_{\max} - x_{\min}), & 2x_{\max} + x_{\min} < x_0 < \dots \end{cases} \quad (11)$$



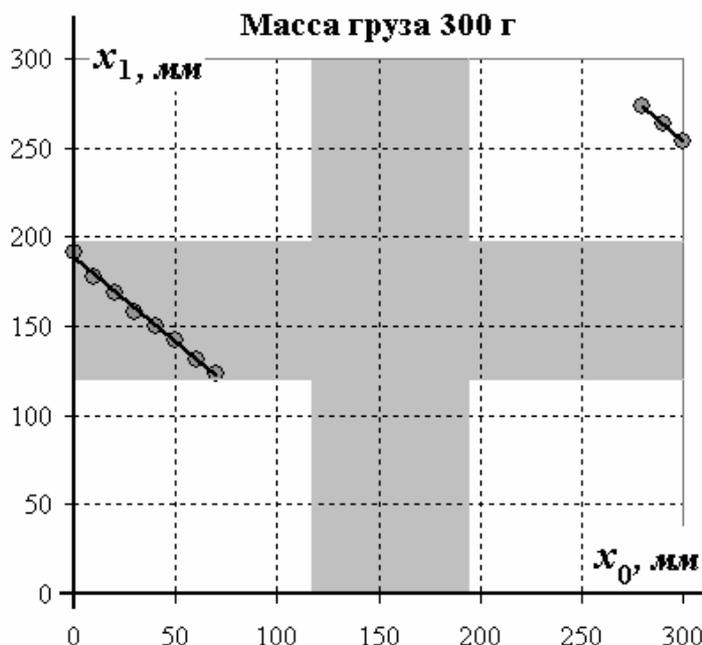
На графике выделена область застоя, как для начальной, так и конечной координаты.

Согласитесь, не традиционная зависимость для экспериментальной проверки! Посмотрим, что же получилось в эксперименте.

В Таблице 3 и на графике показаны экспериментальные значения координат начальной и конечной точек при массе груза 300 г. Координаты точек конечной остановки получены усреднением по 5 экспериментальным данным. Отметим, что разброс результатами отдельных измерений не превышал 3 мм. На диаграмме выделена область застоя, построенная по данным первой части (для данной массы груза $x_{\min} \approx 116 \text{ мм}$, $x_{\text{мфп}} \approx 197 \text{ мм}$).

Таблица 3.

x_0 , мм	x_1 , мм
0	191,3
10	177,3
20	168,3
30	158,3
40	149,7
50	141,7
60	131,7
70	123,0
80	117,0
90	113,7
100	110,0
300	253,3
290	263,3
280	273,7



Полученные результаты качественно согласуются с теоретическими предсказаниями – по меньшей мере, есть два четко разделенных между собой участка. Для первого из них (участок 1-2 по нашей теоретической нумерации) соответствие вполне удовлетворительное. Уравнение этого участка, найденное по МНК, имеет вид

$$x_1 = -0,95x_0 + 188.$$

Сравнивая с теоретическим выражением (9), отмечаем, что они соответствуют друг другу «в пределах погрешности измерений» – коэффициент наклона близок к -1, координата

нижней границы зоны застоя $\tilde{x}_{\min} = \frac{188}{2} \approx 94 \text{ мм}$, примерно совпадает с найденным в

статических условиях значению $x_{\min} \approx 116 \text{ мм}$. Со вторым участком дело обстоит значительно хуже – он даже не попал в ранее найденную зону застоя! Уравнение второго отрезка

$$x_1 = -1,0x_0 + 58.$$

С наклоном все отлично – полное совпадение, а вот верхняя граница зоны застоя

$\tilde{x}_{\max} = \frac{558}{2} = 280 \text{ мм}$ в полтора раза выше, чем в статическом случае $x_{\max} = 197 \text{ мм}$.

Правда при этих деформациях не выполняется закон Гука, кроме того, коэффициент трения покоя отличается от коэффициента трения скольжения. А может этот коэффициент возрастает при увеличении скорости, нить «вгрызается» в пластик? Нужны дополнительные исследования!