

Таблица 1. Теоретические результаты.

Уравнение теплового баланса	$C_1(\theta - t_1) = C_2(t_2 - \theta)$		
Вид зависимости	1) $y(x) = t_2(t_1)$	2) $y(x) = \Delta t(t_1)$	3) $y(x) = \Delta t(t_2)$
Замена переменных		$t_2 = t_1 + \Delta t$	$t_1 = t_2 - \Delta t$
Теоретическая зависимость	$t_2 = -\frac{C_1}{C_2}t_1 + \frac{C_1 + C_2}{C_2}\theta$	$\Delta t = \frac{C_1 + C_2}{C_2}(\theta - t_1)$	$\Delta t = \frac{C_1 + C_2}{C_1}(t_2 - \theta)$
Вид линейной зависимости	$y = ax + b$		
Обозначения переменных	$y = t_2$ $x = t_1$	$y = t_2 - t_1 = \Delta t$ $x = t_1$	$y = t_2 - t_1 = \Delta t$ $x = t_2$
Теоретические значения параметров линейной зависимости	$a = -\frac{C_1}{C_2} = -\eta$ $b = \frac{C_1 + C_2}{C_2}\theta = (\eta + 1)\theta$	$a = -\frac{C_1 + C_2}{C_2} = -(\eta + 1)$ $b = \frac{C_1 + C_2}{C_2}\theta = (\eta + 1)\theta$	$a = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = 1 + \frac{1}{\eta}$ $b = -\frac{C_1 + C_2}{C_1}\theta = -\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)\theta$
Выражение для конечной температуры через параметры линейной зависимости	$\theta = \frac{b}{1 - a}$	$\theta = -\frac{b}{a}$	$\theta = -\frac{b}{a}$
Погрешность определения конечной температуры	$\Delta\theta = \theta \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{1 - a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$	$\Delta\theta = \theta \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$	$\Delta\theta = \theta \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$
Выражение для определения отношения теплоемкостей	$\eta = -a$	$\eta = -a - 1$	$\eta = \frac{1}{a - 1}$
Погрешность определения отношения теплоемкостей	$\Delta\eta = \Delta a$	$\Delta\eta = \Delta a$	$\Delta\eta = \frac{\Delta a}{(a - 1)^2}$

Таблица 2. Результаты расчетов.

зависимость	1) $y(x) = t_2(t_1)$	2) $y(x) = \Delta t(t_1)$	3) $y(x) = \Delta t(t_2)$
Параметр a (K/e)	-0,339	1,339	3,94
Погрешность Δa (K/e)	0,012	0,012	0,10
Относительная погрешность	3,4%	0,9%	2,5%
Параметр b , °C	65,4	65,4	192,3
Погрешность Δb , °C	0,4	0,4	5,5
Относительная погрешность	0,6%	0,6%	3%
Конечная температура θ , °C	48,85	48,85	48,83
Погрешность $\Delta \theta$, °C	0,52	0,52	1,9
Относительная погрешность	1%	1%	4%
Отношение теплоемкостей η	0,339	0,339	0,340
Погрешность $\Delta \eta$	0,012	0,012	0,012
Относительная погрешность	4%	4%	4%

Прекрасное соответствие результатов, полученных тремя методами! Как и ожидалось, наибольшая погрешность получилась в третьем методе («по горячей воде») – но и здесь погрешность не высока 3-4%.

Немного странно, что в первом методе относительная погрешность конечной температуры оказалась меньше чем, относительная погрешность расчета коэффициента наклона. Хотя в формулу (и в погрешность) входит $(1-a)$, поэтому этот параметр не сильно влияет на конечный результат.

Итог: потерями теплоты в окружающую среду можно пренебречь. Конечная температура воды должна стать равной

$$\theta = (48,8 \pm 0,5)^\circ\text{C};$$

отношение теплоемкостей воды в стакане и сосуда с горячей водой равно

$$\eta = 0,339 \pm 0,012.$$

Еще один парадокс: точность рассчитанного значения температуры выше точности термометра? Можно объяснить так: если у термометра есть приборная систематическая погрешность (сдвиг шкалы), то она вошла в конечный результат, но в дальнейшем надо использовать разности показаний, поэтому постоянный сдвиг не существен; результат получен по усреднению большого числа данных со случайными ошибками (ошибка округления то же случайная), поэтому результат усреднения может иметь более высокую точность, чем точность отдельного значения (или я не прав?).

Полученное значение конечной температуры позволяет построить временные зависимости температур (5)-(7) в логарифмическом масштабе – строим.

Получилось не плохо – если отбросить несколько первых точек, то остальные добросовестно ложатся на прямые; проводим их – замечательно, «на глаз» они параллельны!

А что покажут расчеты по МНК коэффициентов наклона:

- «по холодной воде»:

$$a = -(6,50 \pm 0,45) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1};$$

- «по горячей воде»:

$$a = -(6,23 \pm 0,38) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1};$$

- по разности температур:

$$a = -(6,43 \pm 0,36) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}.$$

Результаты согласуются между собой (и погрешности близки), поэтому можно их усреднить и принять

$$a = -(6,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1},$$

где погрешность примерно в $\sqrt{3}$ раз меньше погрешности одного результата¹. Наконец, рассчитываем коэффициент теплопередачи с помощью формулы (4):

$$K_2 = \frac{cm}{1+\eta} |a| = 3,05 \frac{Bm}{K},$$

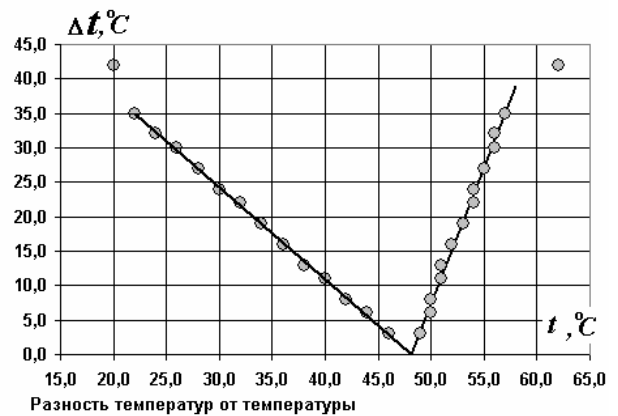
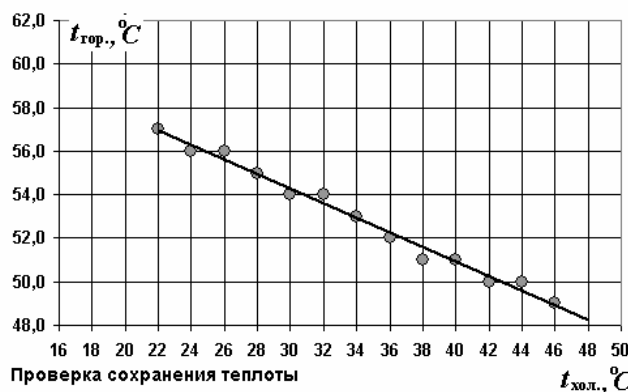
что в полтора раза отличается от полученного ранее. А погрешность:

$$\Delta K_2 = K_2 \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \eta}{1+\eta}\right)^2} \approx 0,1 \frac{Bm}{K},$$

что составляет всего 3%. Конечно, этому результату следует доверять гораздо больше.

Что провести расчеты для одинарного стаканчика достаточно в Excel загнать таблицу результатов измерений температур для него. Не буду выписывать все промежуточные выкладки, приведу только графики и конечный результат.

Одинарный стакан



Качественно, все то же самое, только разброс больше, особенно для начальных точек – их надо отбрасывать!

Расчет конечной температуры и отношения теплоемкостей приводит к стыкующимся результатам только с заметно большей погрешностью, которая минимальна для зависимости (2) – «по холодной воде»:

¹ Несущественная неточность – скорее надо делить на $\sqrt{2}$, так как независимых измерения только две серии.

- конечная температура $\theta = (48,2 \pm 1,3)^\circ\text{C}$;
- отношение теплоемкостей $\eta = (0,33 \pm 0,03)$ - как и следовало ожидать, совпадает с данными по двойному стаканчику.

Временные зависимости изменения температуры (в логарифмическом масштабе) также дают более заметный разброс. Здесь пришлось отбросить не только 6 начальных точек, но и одну последнюю – больно далеко она выскакивала. Построенные по оставшимся точкам прямые получились примерно параллельными. Усредненное значение показателя экспоненты оказалось равным

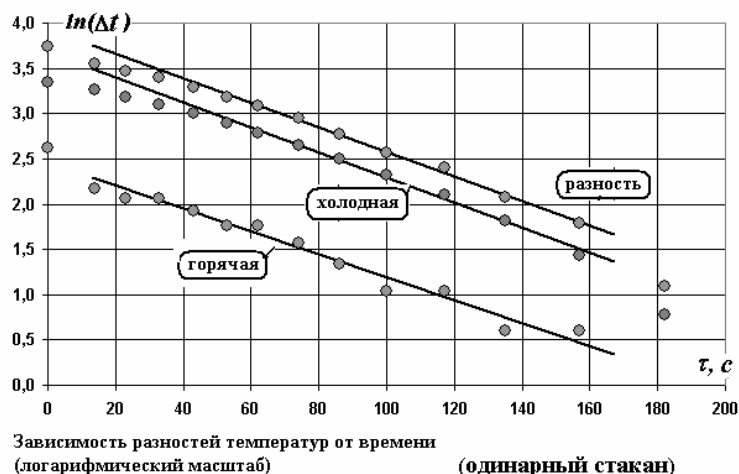
$$a = -(13,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}.$$

Соответственно, значение коэффициента теплопередачи равно

$$K_1 = (6,3 \pm 0,2) \frac{\text{Вт}}{\text{К}},$$

с относительной погрешностью 3% (а не 15%, как было раньше). Таким образом, отношение полученных коэффициентов очень близко к двум (хотя и чуть-чуть выше, но в пределах погрешностей), поэтому нет необходимости приписывать нарушение здравого смысла (и физических законов, что почти одно и то же) пагубному влиянию воздуха!

Вот такая замечательная работа получилась – неожиданно. Конечно, выполнить ее в отведенное время, да еще вручную, на олимпиаде невозможно. Но не жаль потраченного времени. Если бы в условии дали формулы для временных зависимостей и подсказали, что с ними делать, то по одной из трех методик можно было бы и посчитать, особенно с компьютером! Ведь будут когда-нибудь на олимпиаде в качестве оборудования (и маленького сувенира) выдавать ноутбук, тогда на физической олимпиаде можно будет заниматься физикой, а не арифметикой²!



² И опять надо соглашаться с этой, увы, утопической идеей.



Задача 17. «Просто лампочка»

Приборы и оборудование: Лампочка накаливания 2,5 В; батарейка 4,5 В; реостат; проволочный резистор; амперметр школьный; мультиметр; ключ электрический; соединительные провода; термометр.

Часть 1. Сопротивление резистора.

1.1 Проверьте выполнимость закона Ома для проволочного резистора.

1.2 Определите с максимально возможной точностью сопротивление проволочного резистора.

Часть 2. Вольтамперная характеристика (ВАХ) лампочки накаливания.

Подсказка – рекомендация: В дальнейших измерениях не используйте амперметр, так как его точность не достаточна для получения надежных результатов.

2.1 Измерьте ВАХ лампочки накаливания. Постройте ее график.

2.2 Определите сопротивление нити накала лампочки при комнатной температуре с максимально возможной точностью.

2.3 Постройте график зависимости сопротивления нити накала от силы тока через лампочку.

2.4 Дайте качественное объяснение полученных зависимостей.

Часть 3. Механизмы теплоотдачи.

Подсказки:

1. Сопротивление металлических проводников R возрастает при возрастании температуры T по закону

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T), \quad (1)$$

где $\Delta T = T - T_0$ превышение температуры проводника над комнатной температурой T_0 ; R_0 - сопротивление проводника при комнатной температуре; α - температурный коэффициент сопротивления.

Для вольфрама, из которого изготовлена нить накала, $\alpha = 4,50 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

2. Мощность теплового излучения нагретых металлов пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры (закон Стефана – Больцмана³)

³ Строго говоря, этот закон справедлив для абсолютно черного тела. Металлы таковыми не являются, однако с хорошей точностью коэффициент поглощения металлов постоянен. Тела, обладающие таким свойством, называются серыми. Формула (2) справедлива и для них, но при этом коэффициент в законе Стефана – Больцмана отличается от постоянной Стефана – Больцмана.

$$P_{\text{рад.}} = aT^4, \quad (2)$$

где $P_{\text{рад.}}$ - энергия, испускаемая нагретым телом в единицу времени (далее называемая мощностью радиационных потерь); a - постоянный коэффициент, зависящий от размеров и материала металлического тела.

3. Передача теплоты (тепловые потери) от нити накала в окружающую среду осуществляется посредством различных механизмов.

3.1 Постройте график зависимости тепловых потерь нити накала от ее абсолютной температуры.

3.2 На основании экспериментальных данных определите, применим ли закон Стефана – Больцмана к излучению нити накала лампочки.

3.3 Определите, какая доля теплоты, отдаваемая лампочкой в окружающую среду, передается посредством излучения. Постройте график зависимости этой доли от температуры нити накала.

Комментарии к условию задачи.

1. Для выполнения данной задачи нужна высокая точность измерений. Поэтому необходимо использовать цифровой мультиметр, работающий в режиме вольтметра.
2. В работе используется стандартный проволочный резистор сопротивлением 1 Ом.
3. Термометр необходим только для измерения комнатной температуры (можно один на всех).
4. В качестве источника тока можно использовать и ЛИП.
5. В качестве реостата используется школьный переменный резистор сопротивление 6 Ом, к которому следует подключить третий вывод, что бы включать его по схеме реостата.

Размышления и решение.

Условие не очень длинное и понятное. Ожидаемые результаты *очевидны*. Для проволочного резистора закон Ома (для участка цепи – забыли?) выполняется – это мы еще на заре изучения физики проверяли. Для лампочки связь между силой тока и напряжением должна быть нелинейной: при увеличении силы тока нить будет разогреваться и ее сопротивление возрастать. Следовательно, сила тока будет возрастать медленнее. *Очевидно*, что когда лампочка начнет светиться, то основные потери теплоты будут (как это назвали?) радиационными, надо понимать – излучением. В чем это должно проявляться? Мощность общих потерь теплоты должна быть пропорциональна четвертой степени температуры. Проверить это элементарно – построить график зависимости мощности потерь от температуры в логарифмическом масштабе и убедиться, что коэффициент его наклона примерно равен четырем! Кстати, а как найти мощность потерь? Энергию излучения измерить нечем! Да это же просто энергия, выделяющаяся на лампочке – ее мощность равна произведению силы тока на напряжение – куда еще этой энергии деваться! Интересно, а сопротивление равно отношению напряжения и силы тока. Красивая зависимость: произведения от частного.

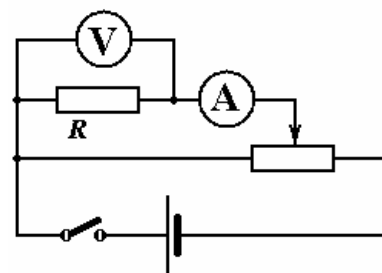
Теперь о температуре. Термометр в лампочку не засунешь! Но температура входит в формулу для сопротивления: сопротивление рассчитаю, а затем с помощью формулы (1) найду температуру. Комнатная температура известна – сколько там на термометре? Как обычно - 20°C (один результат измерения уже есть!). Хорошо, фактически нужно поточнее измерить ВАХ - какую характеристику. А дальше все рассчитывается.

Последнее – как измерять? Понятно, что реостат нужен для того, чтобы изменять напряжение (молодцы – третий вывод подключили). Амперметр надо будет подключить последовательно, мультиметр (как вольтметр) - параллельно резистору, без фокусов. Для измерения вольтамперной характеристики лампочки настоятельно не рекомендуют использовать амперметр (и правильно – сколько можно пользоваться этим старьем). А как тогда измерять силу тока? Понятно теперь зачем нужна первая часть – включу проволочный резистор (так по внешнему виду сопротивление пара Ом) и лампочку последовательно и буду измерять напряжение на лампочке, так приказано, а на резисторе для измерения силы тока. Все понятно, осталось сделать.

Часть 1.

Собираем схему. Нет, сначала ее нарисуем.

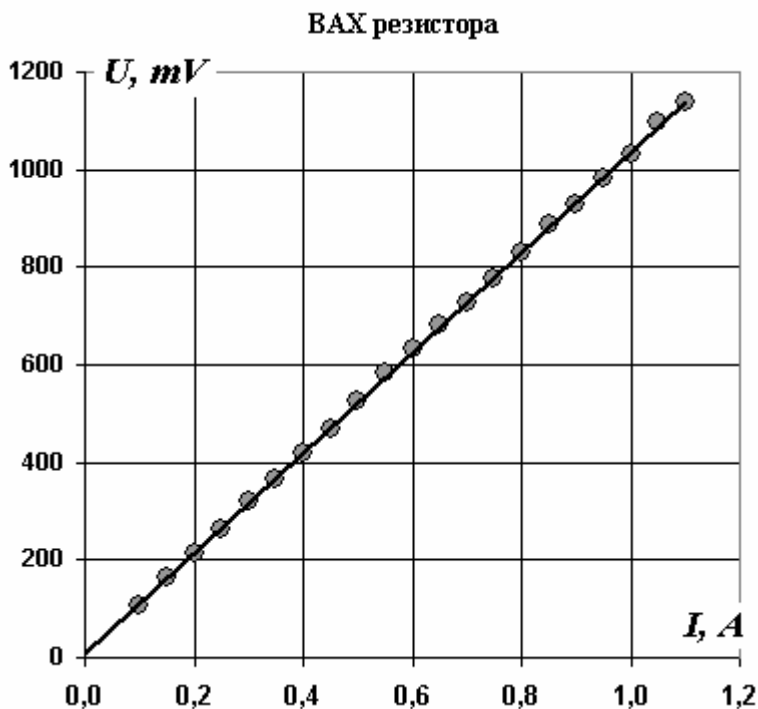
Красивые ступеньки получились, и ключ на месте! Собираем, полярность приборов не попутать, включаем - ток есть, напряжение есть. На каком диапазоне лучше измерять – похоже, что 2000 mV . Двигаю движок реостата, сила тока изменяется, напряжение тоже – можно измерять.



Как обычно: буду подгонять стрелку амперметра к делению шкалы, а затем снимать показания вольтметра – так точнее. Результаты измерений (через каждое деление и весь диапазон) в таблицу 1.

Таблица 1. Зависимость напряжения на резисторе от силы тока.

I, A	U, mV
0,10	106
0,15	165
0,20	215
0,25	264
0,30	322
0,35	367
0,40	420
0,45	470
0,50	527
0,55	585
0,60	633
0,65	682
0,70	726
0,75	777
0,80	831
0,85	886
0,90	929
0,95	982
1,00	1031
1,05	1096
1,10	1138



Строю график (так как измерял: напряжение от силы тока – это тоже ВАХ). Ну, что я говорил – практически идеальная прямая! Так как сопротивление надо определить с

максимально возможной точностью (и погрешность считать надо), то надо обрабатывать по МНК. Записываем

$$U = aI + b.$$

Очевидно, что здесь коэффициент a есть сопротивление резистора $a = R$ (хорошо, меньше считать), а b - должно быть равно нулю. Считаем, получаем:

$$R = (1,027 \pm 0,007) \text{ Ом}, \quad b = (10 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

С сопротивлением просто замечательно – один Ом, поэтому напряжение на нем численно равно силе тока (можно будет и не делить!). Кроме того, очевидно, что вольтметр можно считать идеальным – его сопротивление намного больше сопротивления резистора, будем надеяться, что и лампочки.

А вот с b «неувязочка вышла» - не равно нулю. Чуть-чуть, но не нуль. Будем считать, что закон Ома выполняется, а шкала амперметра чуть сбита – вполне правдоподобно! Посмотрю – похоже, что стрелка не на нуле при выключенной цепи. Хотя это и не принципиально – все равно этот амперметр теперь можно выбросить!

Часть 2.

Новую схему надо нарисовать: амперметр заменить на лампочку. Как это показать, что одним вольтметром измеряю два напряжения? Нарисую стрелочки в местах подключения (неужели жюри будет придираться?).

Проверяю, включаю – работает! Измеряю, результаты (сила тока I – в миллиамперах, то же, что напряжение на резисторе U в милливольтгах; напряжение на лампочке, тоже в милливольтгах) в Таблицу 2. Так, что мне еще надо будет строить? Сопротивление: $R = \frac{U}{I}$ («мили» сокращаются, получаются Омы).

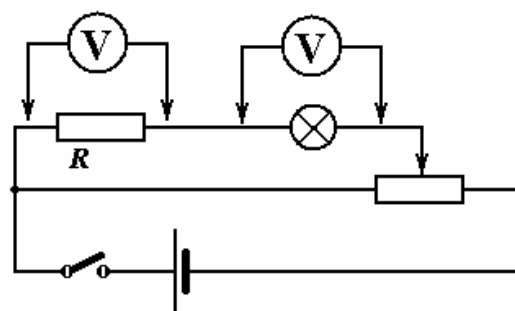
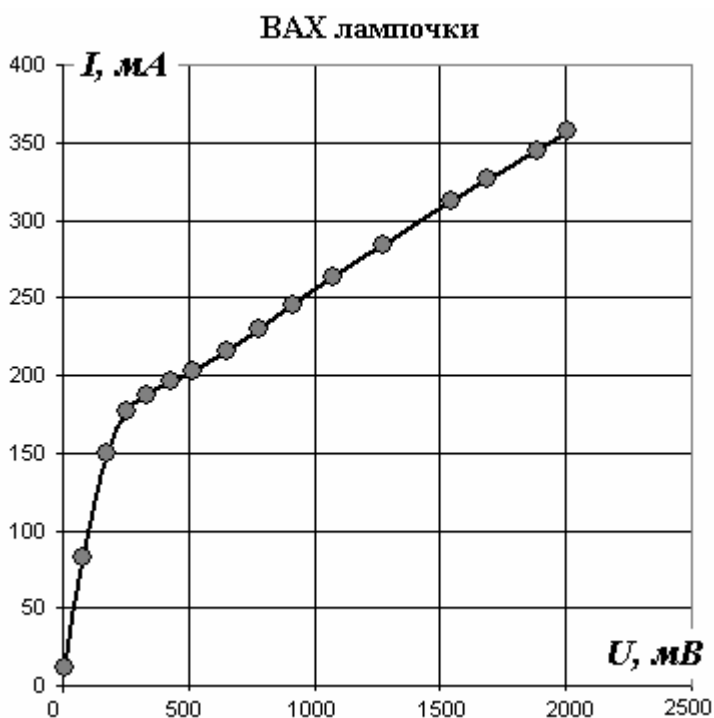


Таблица 2. ВАХ лампочки.

$I, \text{ мА}$	$U, \text{ мВ}$	$R, \text{ Ом}$
11	10	0,909
82	80	0,976
150	178	1,187
177	256	1,446
187	331	1,770
196	429	2,189
203	515	2,537
216	653	3,023
230	779	3,387
245	914	3,731
263	1072	4,076
284	1273	4,482
312	1541	4,939
326	1691	5,187
344	1884	5,477
357	2010	5,630



Так, теперь строим график вольтамперной характеристики (пусть теперь будет физическим: сила тока от напряжения). Если бы подгонял, то нарисовал бы его более плавным – так он похож на два отрезка прямых. Кстати, излом как раз в том месте, где лампочка начинает светиться (при токе около 200 мА).

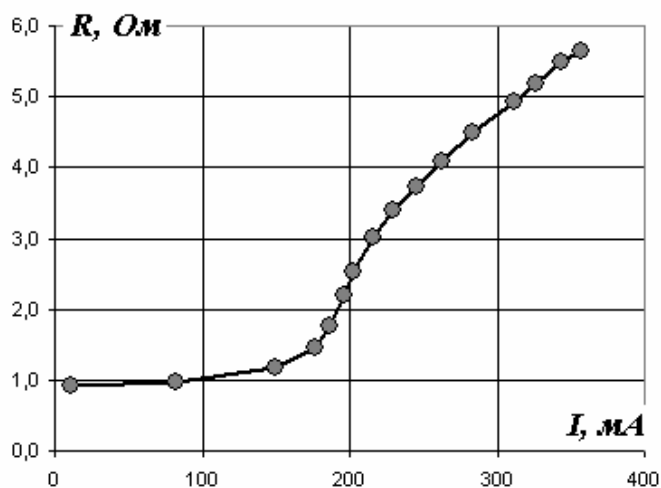
Интересно, какой получится график зависимости сопротивления от силы тока? Строю. Тоже наугад не угадаешь!

Качественное объяснение (я так понимаю, что без формул) *очевидно*: при малых токах температура нити приблизительно равна комнатной, когда нить начинает светиться, ее температура возрастает, поэтому возрастает ее сопротивление, как написано в формуле (1) и как видно на графике зависимости сопротивления от температуры.

На вольтамперной характеристике лампочки зависимость тока от напряжения становится более пологой.

Вроде понятно, но эти изломы являются «какой-то характерной особенностью», в области которой густота точек должна быть больше (так учили!).

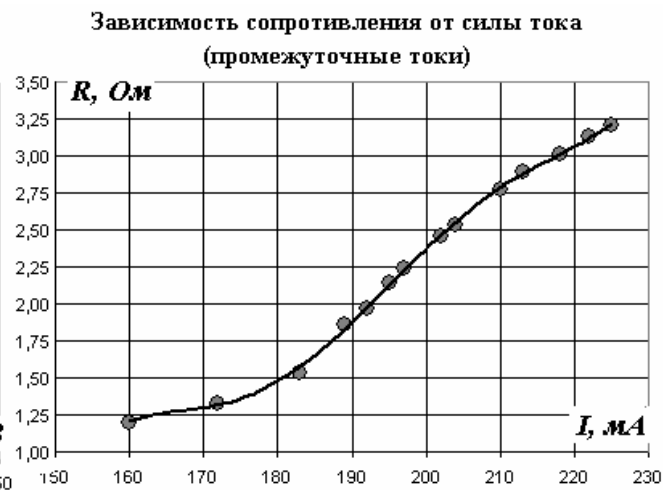
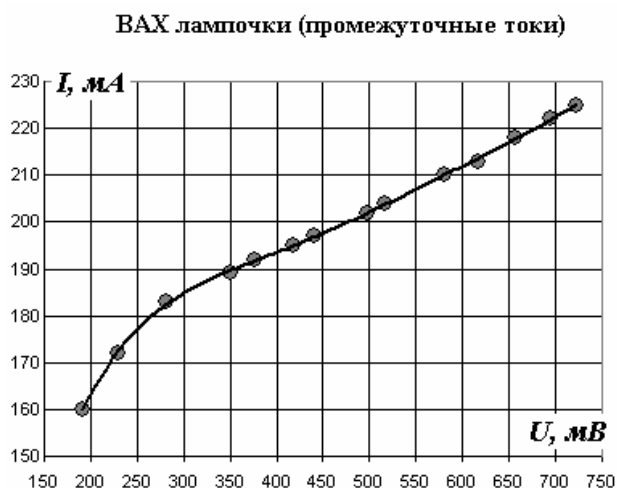
Хорошо, что дали одну задачу на 5 часов. Время есть – надо в области излома получить побольше точек (еще промерить, это не долго, а жюри не придерется⁴). Результаты в таблице 3 и на графиках.



Зависимость сопротивления лампочки от силы тока

Таблица 3. Дополнение Таблицы 2.

<i>I, mA</i>	160	172	183	189	192	195	197	202	204	210	213	218	222	225
<i>U, mB</i>	192	229	281	351	377	418	441	497	517	581	616	656	694	722
<i>R, Ом</i>	1,20	1,33	1,54	1,86	1,96	2,14	2,24	2,46	2,53	2,77	2,89	3,01	3,13	3,21



Конечно, при таком малом интервале никаких изломов не видно, они превратились в изгибы, достаточно плавные переходы, что по-хорошему радует!

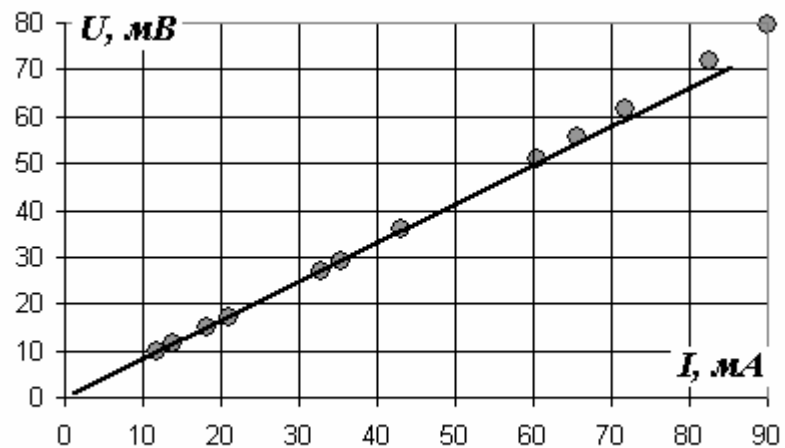
Похоже, что с первыми двумя частями управился и не плохо. Чуть не забыл, а сопротивление холодной нити? Может взять минимальное значение сопротивления из Таблицы 2? Нет, надо же «с максимально возможной точностью»! Лучше еще измерить в

⁴ Правильные рассуждения, правильный подход! Только в данном случае эти дополнительные измерения не обязательны (можно было добавить несколько точек на предыдущие графики), так как основной интерес представляют измерения в предельных областях малых и больших токов.

области малых токов⁵. Здесь можно перейти и в другой диапазон измерения напряжения 200 мВ, точнее будет. Вот только реостатом труднее регулировать малые токи. Тем не менее - результаты в очередной Таблице 4.

Таблица 4. ВАХ холодной лампочки.

<i>I, mA</i>	<i>U, mV</i>
11,9	9,7
13,9	11,4
18,2	15,1
20,9	17,2
32,7	27,0
35,5	29,2
43,1	35,9
60,5	51,0
65,7	55,8
71,9	61,6
82,6	71,9
89,9	79,4



Рисуем график: оси, подписал, оцифровал, точки нанес. Вроде все на прямой. А если приложить линейку – заметно, что немного уходят вверх. И тут нить немного нагревается! Проведу через первые точки – сколько их легло на прямую? Шесть штук, по ним и рассчитаю (опять МНК), вот и результат:

$$R_0 = (0,826 \pm 0,008) \text{ Ом},$$

$$b = (-0,06 \pm 0,2) \text{ мВ}.$$

Замечательно, погрешность сопротивления меньше одного процента! И с *b* все в порядке – это нуль; во-первых, меньше погрешности расчета, во-вторых, на порядок меньше цены деления. Прав Георг Симон Ом, если пользоваться нормальным прибором!

Продолжаем.

Часть 3.

Сначала надо немного поразмыслить. Здесь надо искать зависимости мощностей от абсолютной температуры. С суммарной мощностью понятно: $P = UI$ (если и то и другое в «мили», то уже получится «мили в квадрате» - это «микро», но числа получаются слишком большие, поэтому перемножу, а потом в уме разделю на тысячу – получаться милливольты).

Радиационные потери надо считать по-другому. Хорошо бы найти коэффициент пропорциональности в формуле (2). Может по крайней точке – считать, что при максимальном токе вся теплота уходит от нити благодаря излучению? Тоже выход, на крайний случай. А если «Степа Больцманов» тут не применим? Надо же сначала это проверить. Температуру найдем: из формулы

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T)$$

следует, что абсолютную температуру нити надо рассчитывать по формуле

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0},$$

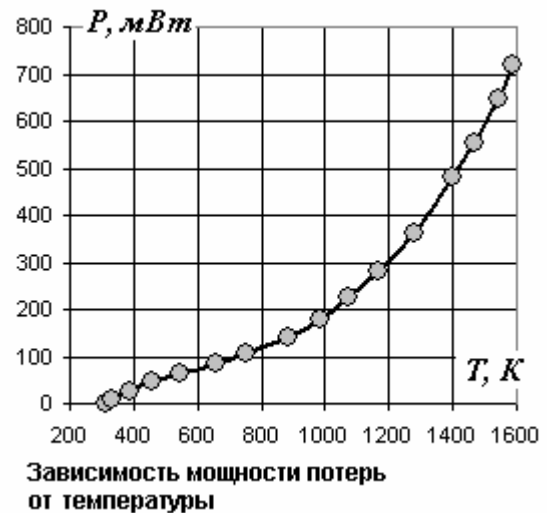
⁵ А вот эти измерения необходимы – значение сопротивления холодной нити нужно для дальнейших расчетов!

здесь $T_0 = 20^\circ\text{C} + 273^\circ\text{C} = 293^\circ\text{K}$ - абсолютная комнатная температура (плюс-минус градус, или пара градусов).

Напряглись: результаты расчетов в таблице 5.

Таблица 5. Расчет температуры и мощности.

I, mA	U, mV	R, Om	T, K	$P, \text{mВт}$
11	10	0,909	315	0,11
82	80	0,976	333	6,56
150	178	1,187	390	26,70
177	256	1,446	460	45,31
187	331	1,770	547	61,90
196	429	2,189	660	84,08
203	515	2,537	753	104,55
216	653	3,023	884	141,05
230	779	3,387	982	179,17
245	914	3,731	1074	223,93
263	1072	4,076	1167	281,94
284	1273	4,482	1277	361,53
312	1541	4,939	1400	480,79
326	1691	5,187	1466	551,27
344	1884	5,477	1544	648,10
357	2010	5,630	1586	717,57



Все как предсказано: мощность резко возрастает с ростом температуры. На степенную функцию очень похоже, но какой степени? Проверять формулу (2) «в лоб», построив зависимость мощности от четвертой степени температуры – работа для начинающих талантов! Я же сразу могу определить показатель степени в зависимости

$$P = CT^\gamma$$

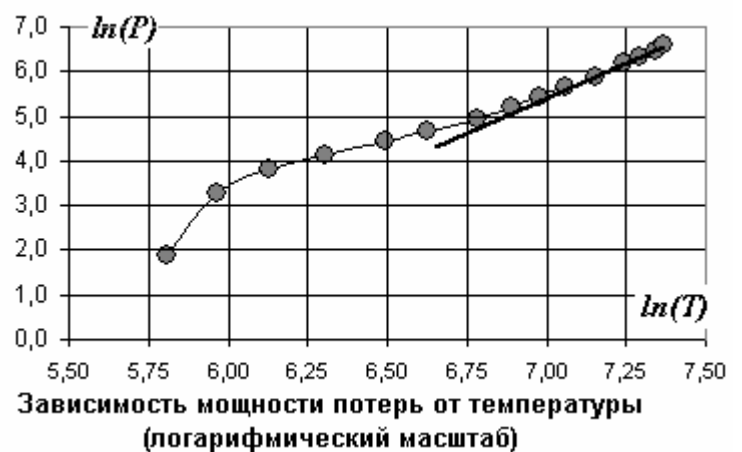
с помощью логарифмирования этой формулы. Быстренько (время поджимает) строю график в логарифмическом масштабе. Что-то далековато от линейной зависимости. Хотя через последние точек пять-шесть прямую провести можно. Считаю по МНК коэффициент наклона (он же показатель степени):

$$\gamma = 3,1 \pm 0,1.$$

Но это же, увы, сильно отличается от ожидаемой четверки!

Почему? Погрешности измерений? Но сопротивления были хорошо измерены, поэтому и температуры и мощности, должно быть, рассчитаны хорошо.

Закон Стефана-Больцмана здесь не применим? Сомнительный вывод. А что в условии подсказывали про него? Внимательно, пункт третий – разные механизмы теплопередачи! Действительно, сама лампочка нагревается, поэтому есть теплопередача в воздух (теплопроводность, конвекция). Она тоже зависит от температуры? Возможно, пропорционально температуре, или разности температур лампочки и воздуха? Не будем шархаться от одной крайности в другую: все-таки, когда нить светится, основные потери должны быть за счет излучения. Поэтому остальные потери составляют небольшую



добавку, которую приближенно можно считать пропорциональной температуре (не очень даже важно в Кельвинах, или Цельсиях). Попробуем.

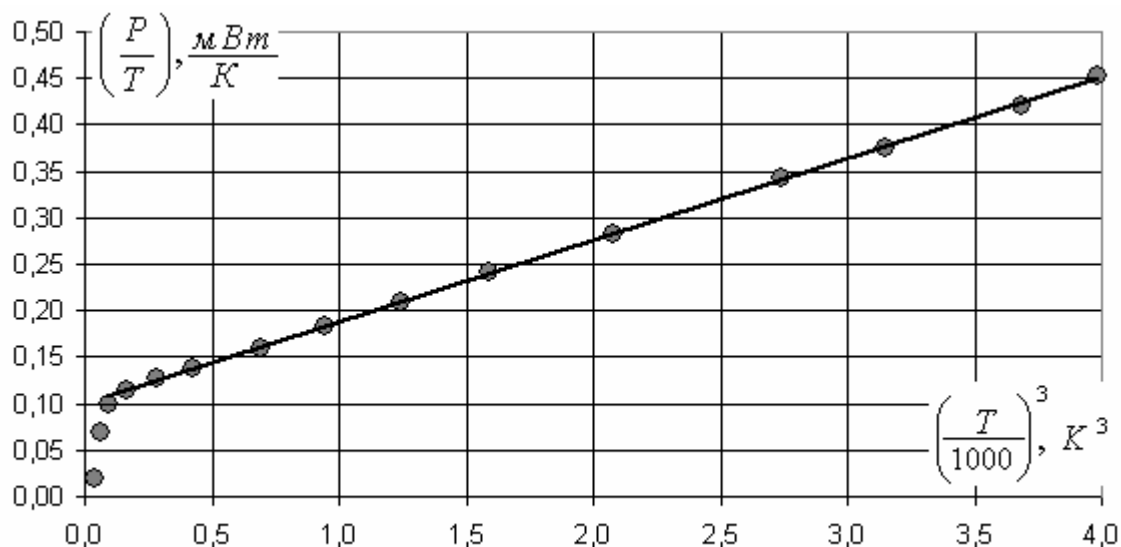
Итак, представим потери теплоты в виде суммы⁶ радиационных (пропорциональных четвертой степени температуры) и остальных (пропорциональных температуре):

$$P = aT^4 + bT.$$

Эту зависимость линеаризуем:

$$\frac{P}{T} = aT^3 + b.$$

Построим теперь график зависимости отношения мощности к температуре от куба температуры. Температура в кубе – слишком большое число, для упрощения буду делить температуру на тысячу (потом этот множитель учту). Расчеты закончены, строю график и ... ура!



Линеаризация зависимости мощности потерь от температуры

Получилось! Гораздо лучше, чем было! Несколько начальных точек (от них никто ничего хорошего не ждал) выпали, но оставшийся десяток то очень точно легли на прямую, параметры которой равны (опять по МНК):

$$a = (0,0876 \pm 0,015) \cdot 10^{-12} \frac{Bm}{K^4}, \quad b = (0,101 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \frac{Bm}{K}.$$

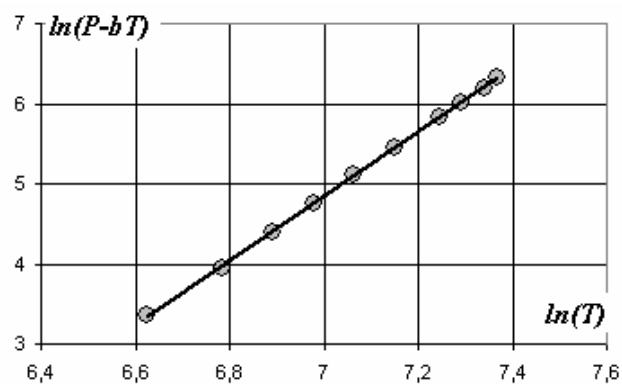
Проведу еще одну проверку. Построю зависимость мощности радиационных потерь от температуры в логарифмическом масштабе (для последних десяти точек) и определю показатель степени, в соответствии с формулами

$$P - bT = aT^4$$

$$\ln(P - bT) = \ln a + \gamma \ln T.$$

Здорово, почти идеально. А показатель степени? Считаю:

$$\gamma = 4,01 \pm 0,05.$$



Зависимость радиационных потерь от температуры (логарифмический масштаб)

⁶ Замечательная экспериментальная идея, не обоснованная, но вполне разумная. А обоснование может быть дано на основе полученных результатов. Но все-таки, предположение о разности температур лучше, хотя приводит к более громоздким расчетам.

Просто замечательно, и без подгонки! Молодцы Стефан с Больцманом – закон выполняется!

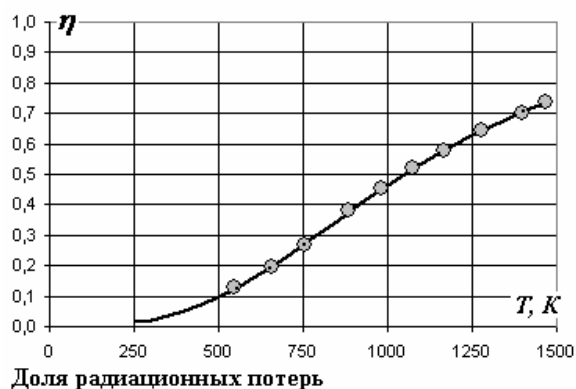
Теперь можно завершать, найти долю теплоты, уносимой радиацией. Теоретически (в рамках моих предположений) эта доля равна:

$$\eta = \frac{aT^4}{bT + aT^4} = \left(1 + \frac{b}{aT^3}\right)^{-1}.$$

Все известно (только, увы, опять считать надо!).

График: непрерывная кривая и экспериментальные точки – все рассчитывается по этой формуле!

Последний вывод: при максимальном (в данном эксперименте) накале излучение уносит около 80% теплоты, выделяющейся на нити при прохождении электрического тока.



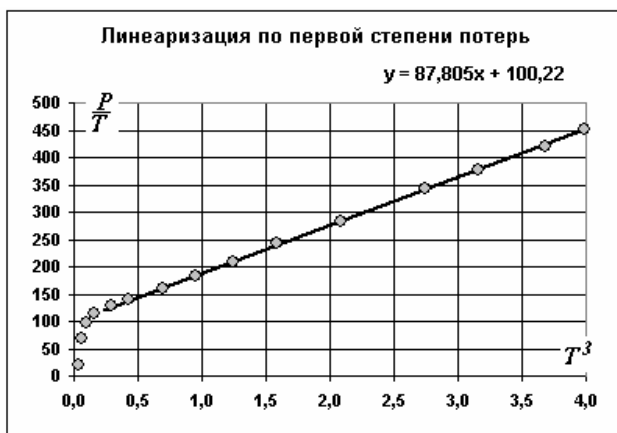
Все-таки математика – мощная наука, а метод наименьших квадратов – тонкий инструмент, позволяющий даже среди небольшого объема экспериментальных данных выявить физически важные следствия.

Домашняя работа.

В выполненной работе все получилось просто замечательно, что не может не вызывать сомнений. Самое странное, что ничем необоснованное предположение о том, что нерадиационные потери пропорциональны абсолютной температуре (просто ничего лучшего в голову не пришло!). Надо еще раз проверить в спокойной обстановке, без спешки, аккуратно, и последовательно. Прежде всего, о единицах измерения – чтобы не возиться с большими и малыми порядками буду все время измерять мощности в милливаттах, а температуру в тысячных долях градуса (и дальше никаких единиц – все «безразмерное»). Экспериментальные данные записываю в одну таблицу (и в компьютер); мне нужны температура T и суммарная мощность P , выделяющаяся на лампочке. Сомнений в определении этих величин нет. Все расчеты можно провести в этой же таблице: для линеаризации нужен куб температуры $T^3 = x$ и отношение мощности к температуре $P/T = y$.

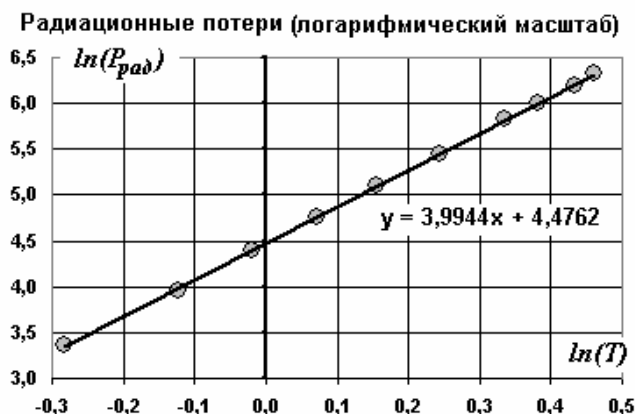
T	P	T^3	P/T	$\ln T$	$\ln(P - bT)$	$P - aT^4$
0,333	6,56	0,0370	19,6849	-1,099	-	5,48
0,390	26,70	0,0593	68,4560	-0,942	-	24,67
0,460	45,31	0,0973	98,5280	-0,777	-	41,38
0,547	61,90	0,1637	113,1608	-0,603	1,957	54,04
0,660	84,08	0,2870	127,4708	-0,416	2,889	67,46
0,753	104,55	0,4275	138,7822	-0,283	3,369	76,27
0,884	141,05	0,6911	159,5371	-0,123	3,960	87,40
0,982	179,17	0,9469	182,4570	-0,018	4,391	97,52
1,074	223,93	1,2404	208,4156	0,072	4,756	106,91
1,167	281,94	1,5909	241,5131	0,155	5,106	118,87
1,277	361,53	2,0809	283,1780	0,244	5,454	128,26
1,400	480,79	2,7414	343,5296	0,336	5,830	143,90
1,466	551,27	3,1525	375,9599	0,383	6,002	145,39
1,544	648,10	3,6823	419,6945	0,435	6,201	148,82
1,586	717,57	3,9857	452,5805	0,461	6,326	162,70

Теперь легко строим график линеаризованной зависимости: действительно десять точек ложатся на прямую. Пусть компьютер построит эту линию тренда и укажет ее параметры $y = ax + b$, просто замечательно - минутное дело!



Теперь можно вычесть нерадиационные потери, оставить только радиационные $P_{рад.} = P - bT$ и построить график зависимости логарифма этой величины от логарифма температуры, и посмотреть на показатель степени, как и раньше несколько первых точек не лезут ни в какие ворота: зато остальные на прямой и коэффициент наклона – четыре (почти!). Теперь можно посмотреть и на остальные (назовем нерадиационные) потери $P_{nr} = P - aT^4$ - действительно ли они

пропорциональны абсолютной температуре? График, параметры линейной зависимости – невероятны! Если отбросить начальные точки, то график прямая линия, да еще проходящая через нуль!



Итак, никаких сомнений – все расчеты и выводы верны! Последний график подтверждает гипотезу о том, что нерадиационные потери пропорциональны абсолютной температуре.

Но как объяснить эту пропорциональность с точки зрения физических законов? Механизм радиационных потерь понятен – нагретая нить испускает свет (в том числе и в инфракрасной области), это излучение и уносит часть энергии, выделяющейся при прохождении тока. Для черных и серых тел суммарная мощность излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры – этот закон доказан экспериментально, выведен теоретически, что послужило одним из источников квантовой физики!

Какими могут быть другие механизмы передачи теплоты от нити накала к окружающей среде? Внутри лампочки находится газ (кажется, аргон), он тоже может переносить теплоту! Но скорость такого переноса должна быть пропорциональна разности температур! Может проверить и эту модель: есть радиационные потери, есть потери пропорциональные разности температур нити и окружающей среды. Провести разделение этих потоков можно аналогичным способом. Попробую! Немножко математики: записываю выражение для суммарного потока (кстати, можно учесть и обратный радиационный поток от воздуха к лампочке – мелочь, но пусть машина считает):

$$P = a(T^4 - T_0^4) + b(T - T_0).$$

Линеаризация понятна:

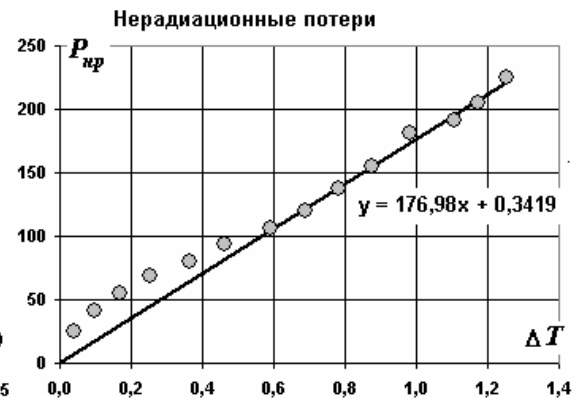
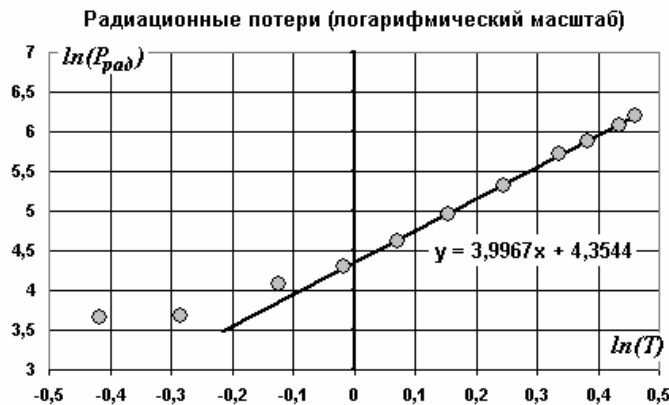
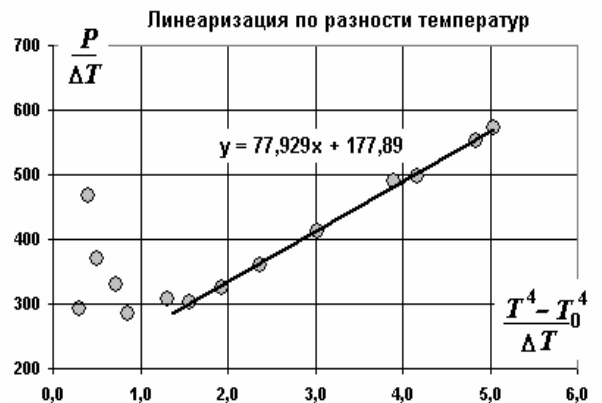
$$\frac{P}{(T-T_0)} = a \frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0} + b,$$

да, в ручную считать замаешься, но $x = \frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0}$, $y = \frac{P}{(T - T_0)}$. Тогда $y = ax + b$.

Все остальные выкладки аналогичны предыдущим расчетам. Сначала большую таблицу с расчетами:

T	P	$(T - T_0)$	$x = \frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0}$	$y = \frac{P}{(T - T_0)}$	$\ln T$	$\ln(P - b\Delta T)$	$P - aT^4$
0,460	45,31	0,097	0,404	467,0	-0,777	3,334	41,83
0,547	61,90	0,167	0,503	370,9	-0,603	3,472	54,92
0,660	84,08	0,254	0,724	331,1	-0,416	3,661	69,33
0,753	104,55	0,367	0,863	285,1	-0,283	3,672	79,45
0,884	141,05	0,460	1,315	306,4	-0,123	4,080	93,43
0,982	179,17	0,591	1,564	303,1	-0,018	4,304	106,71
1,074	223,93	0,689	1,926	325,0	0,072	4,619	120,07
1,167	281,94	0,781	2,369	360,8	0,155	4,962	137,21
1,277	361,53	0,874	3,032	413,5	0,244	5,328	154,49
1,400	480,79	0,984	3,895	488,8	0,336	5,723	181,79
1,466	551,27	1,107	4,172	498,2	0,383	5,870	191,03
1,544	648,10	1,173	4,842	552,4	0,435	6,085	204,97
1,586	717,57	1,251	5,046	573,5	0,461	6,205	225,10

Теперь график линеаризованной зависимости. Конечно, не прямая, но последние 8 точек вполне прилично себя повели – выстроились в шеренгу! Проводим линию тренда, определяем ее уравнение. Его параметры используем для того, чтобы построить зависимость радиационных потерь от температуры (естественно в логарифмическом масштабе); а остальных потерь от разностей температур. Готово! Как и ранее, на несколько первых точек не обращаем внимание, а по остальным определяем уравнения линейных зависимостей.



Опять все сходится: радиационные потери пропорциональны четвертой степени температуры, остальные – пропорциональны разности температур нити и воздуха! Конечно, здорово, но как же эти результаты согласовать с предыдущими?

Сначала гляну на цифры: радуется, что параметры уравнения для радиационных потерь очень близки: показатели степени одинаковы, свободные члены очень близки: 4,4762 в первом случае и 4,3544 – во втором. Различие меньше 3%! Хотя это же в логарифмической зависимости. А если привести к «человеческому виду»: это надо найти разность и вычислить экспоненту – получится отношение мощностей излучения в первой и второй модели: $\exp(4,4762 - 4,3544) \approx 1,13$. Уже 13%, но это не слишком принципиально. Похоже, что в первой модели больше точек подчиняются нужным законам, зато вторую модель легче обосновать физически!

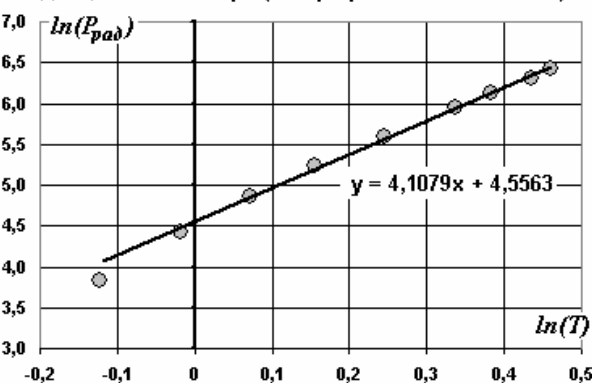
Идея: кажется понял – небольшой математический фокус: когда лампочка светится, основные потери радиационные. Остальные малы, кроме того, в этой области и температура уже не маленькая. Поэтому можно подгонять эти потери как пропорциональной, так и смещенной линейной зависимостями. Но если так, то зачем мучаться? А что если остальные потери считать примерно постоянными, не зависящими от температуры? Попробую, тем более, что это минутное дело, когда компьютер под рукой! В этом случае линеаризация очевидна $y = P$, $x = T^4$. Табличку (первые ряды уже можно выбросить – все равно ни в какую зависимость не укладываются!) и график линеаризации:

T	P	T^4	$\ln(P-b)$	$P - aT^4$
0,753	104,55	0,322	2,27	72,80
0,884	141,05	0,611	3,83	80,82
0,982	179,17	0,930	4,43	87,50
1,074	223,93	1,333	4,86	92,55
1,167	281,94	1,857	5,23	98,86
1,277	361,53	2,657	5,59	99,63
1,400	480,79	3,837	5,96	102,56
1,466	551,27	4,623	6,12	95,58
1,544	648,10	5,686	6,32	87,55
1,586	717,57	6,319	6,43	94,61



Как все знакомо – точки низких температур отклоняются, а при видимом накале нити ровненько укладываются на ожидаемую прямую, параметры которой рассчитываются с помощью двух клавиш! Какой показатель степени в радиационных потерях получается в этом приближении? Логарифмический масштаб, параметры линейной зависимости, готово! Показатель – чуть больше четырех (думаю в пределах погрешности – четыре); свободный член – близок к полученным ранее.

Радиационные потери (логарифмический масштаб)

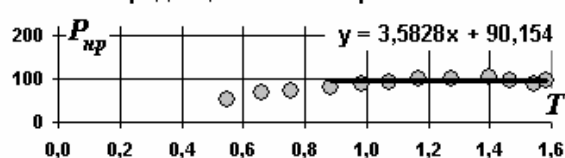


Значит, радиационные потери описываются практически той же функцией! А остальные?

Примерно постоянны!

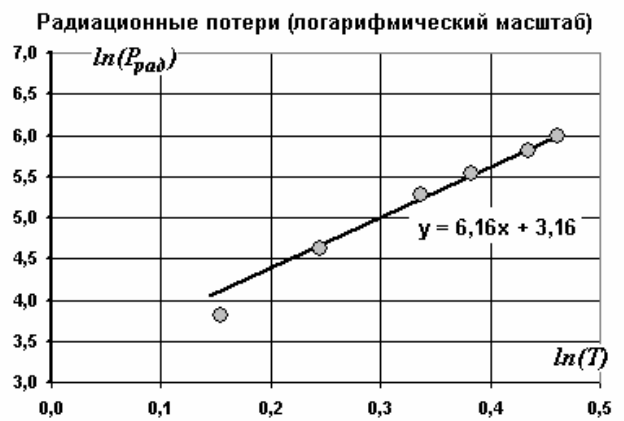
С одной стороны эти результаты подтверждают (вроде?) рассуждения о малости нерадиационных потерях. А с другой – становится очень интересно!

Нерадиационные потери



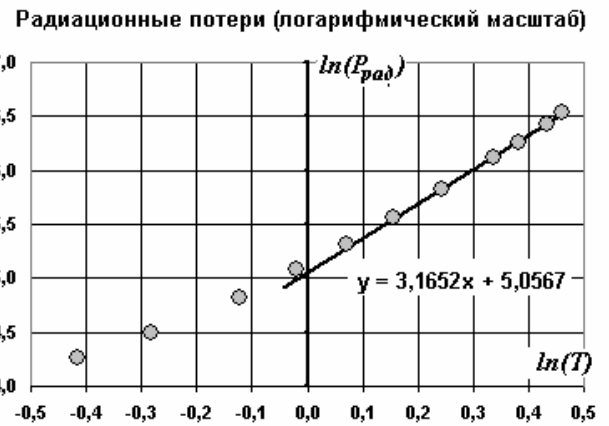
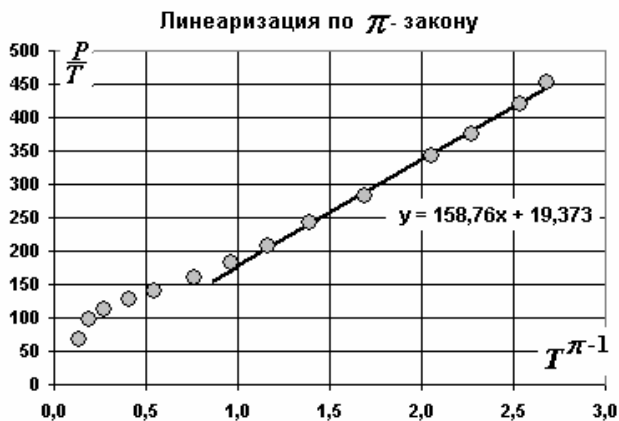
Третья модель потерь – и во всех разумные результаты, хорошее соответствие экспериментальных данных с теоретическими рассуждениями. Это очень странно – привычнее, когда ничего не сходится, а тут все сходится?

Возникает странная и навязчивая мысль – а может и показатель степени в законе Стефана-Больцмана может быть другим? В конце концов, эту пресловутую четвертую степень я закладывал уже в методе линеаризации! А если заложить другую – например шестую! Надо попробовать обязательно. Итак, мощность излучения – пропорциональна шестой степени абсолютной температуры, а мощность остальных потерь пропорциональна первой степени (все-таки, в этом случае кривые были самыми прямыми): $P = aT^6 + bT$. Линеаризация: $y = \frac{P}{T^5}$, $x = T^5$. Таблицу опускаю, сразу графики:



Конечно, похуже – надо оставлять только 5 последних точек! Но показатель степени 6,16 – можно признать равным шести, при необходимости можно было бы и погрешность посчитать и закон в полтора Стефана-Больцмана обосновать!

А если совсем уж экзотическую степень придумать – например, π ! А что, мощность излучения пропорциональна абсолютной температуре в степени π – тоже красиво! А получится? Пробую:



Ничем не хуже предыдущих: есть линейные участки, показатель степени в законе для мощности излучения равен 3,16 – очень близко к числу π . Таким образом, доказано, что мощность теплового излучения пропорциональна абсолютной температуре в степени π ! А точнее – мощность теплового излучения пропорциональна абсолютной температуре в любой, нужной вам степени – необузданная демократия!

Все-таки математика в физике без физики – беспринципная служанка, а метод наименьших квадратов – грубая кувалда, позволяющая на основании экспериментальных данных обосновать любые теоретические измышления.

Нельзя полностью согласиться с окончательным выводом нашего героя! Хотя, в чем-то он прав – бездумное применение мощных математических методов ничего не обосновывает, а чаще просто запутывает, хорошо, если только членов жюри

олимпиады. В данном случае нашему школьнику-отличнику не повезло⁷ – он столкнулся еще с одной некорректной математической задачей. Фактически он разработал методику определения параметров зависимости вида

$$y = Ax^n + Bx^m.$$

Некорректность этой задачи заключается в том, что на относительно небольшом интервале изменения аргумента x , экспериментальные точки могут быть аппроксимированы функциями с различными наборами показателей степеней, причем погрешности такой аппроксимации могут быть совсем небольшими. В рассматриваемой методике изначально задавались показатели степеней, а далее методом наименьших квадратов подбирались значения коэффициентов. Громадная проделанная работа показала, неоднозначность выводов. Какие же возможны выходы из этой ситуации?

Во-первых, необходимо иметь гораздо больший объем экспериментальных данных; во-вторых, следует четко формулировать критерии оптимальности аппроксимации; в-третьих, использовать более совершенные математические методы⁸; наконец, самое главное – больше думать, тогда придется меньше считать. В заключение этого печального раздела, можно привести еще один аналогичный пример. Так, если убывающая функция является суммой двух экспонент

$$F(t) = A_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right),$$

то определение двух времен затухания представляет очень сложную, а может и неразрешимую задачу, особенно если эти времена близки, а экспериментальные данные содержат значительные погрешности!

⁷ Скорее, наоборот, повезло: чужие ошибки дешевле обходятся, зато свои лучше усваиваются!

⁸ В настоящее время продолжает активно развиваться такой экзотический раздел математики, как «методы решения некорректных задач».

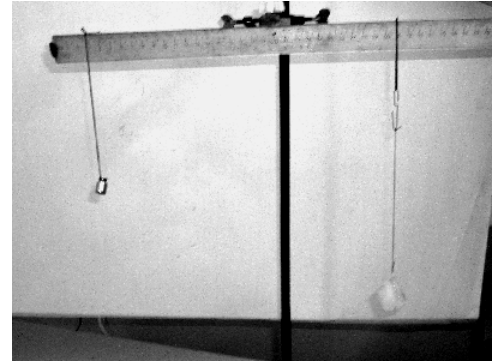


Задача 18. «Лед и воздух»

**Внимание: время проведения измерений – около одного часа!
Планируйте свою работу!**

Приборы и оборудование: штатив с лапкой; иголка или гвоздик; линейка 40 см с отверстием; секундомер; груз известной массы; нитки; 2 кусочка льда; кусочек пластилина; стакан.

Соберите экспериментальную установку, показанную на фотографии. Линейку с отверстием следует использовать как коромысло рычажных весов. В качестве оси используйте иголку или гвоздик, который закрепите горизонтально в лапке штатива. Используя кусочек пластилина, уравновесьте весы. К одному из концов линейки привяжите кусочек льда. С другого края с помощью петли, которая может передвигаться по линейке, прикрепите грузик.



Подвешенный кусочек льда будет медленно таять, при этом с него время от времени срываются капли. Капли должны попадать в стакан, а не на вашу тетрадь!

1. Наблюдая за плавлением льда, зафиксируйте (запишите!) моменты времени отрыва каждой капли. Постройте график этой зависимости, качественно объясните ее.
2. Исследуйте зависимость массы льда от времени. (*Измерять массу льда после отрыва каждой капли очень трудно – и не обязательно!*).
3. Постройте график зависимости массы льда от числа упавших капель. Определите среднюю массу капли. На основании ваших экспериментальных данных установите, можно ли считать размер капель постоянным, или он зависит от размера кусочка тающего льда.
4. Постройте зависимость времени образования капли τ от массы кусочка льда m . Предположим, что эта зависимость на отдельных временных участках имеет вид

$$\tau = Cm^\gamma,$$

где C, γ - постоянные величины.

Предложите теоретическую модель, в рамках которой укажите показатель степени γ .

Проверьте соответствие вашей модели полученным экспериментальным данным.

Примечания к условию задачи.

1. Желательно при замораживании кубиков льда в каждый из них вложить кусочек нитки, за которую потом очень удобно привязывать образовавшийся кусочек льда.
2. Масса грузика должна быть примерно равна массе кусочка льда – так маленький кусочек льда весит примерно 5-6 грамм.
3. Необходимо заранее просверлить небольшое отверстие в линейке на середине длины, но ближе к оцифрованной стороне, так, чтобы центр тяжести линейки находился чуть ниже отверстия.

Размышления и решение.

Спасибо авторам задач: во-первых, условие всего на одну страницу; во-вторых, полно подсказок, особая благодарность за то, что указано: «лед будет таять», а то сам бы не догадался; в-третьих, все знакомо – опять теплопередача, опять степенная функция!

Для расчетов понадобятся: времена отрыва капель, раз; масса кусочка льда в этот момент, два. Что еще? Конечно же, число капель (эта физическая величина измеряется точно, без погрешностей). Для измерения времени есть секундомер.

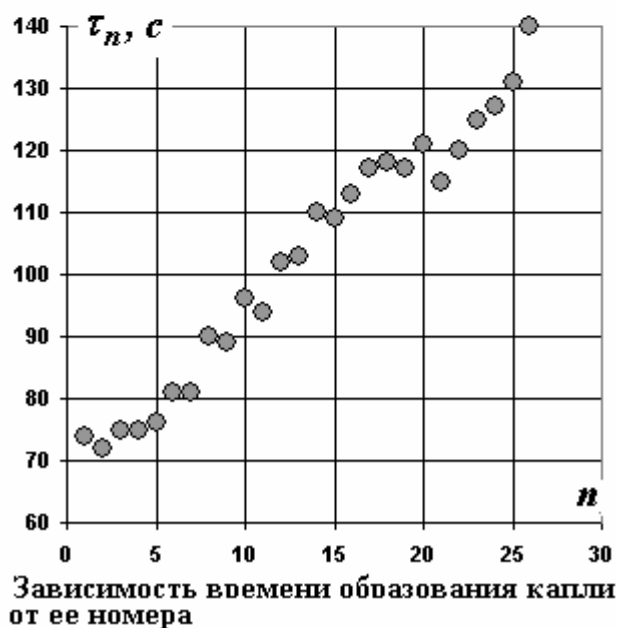
Измерение массы подвешенного груза с помощью уравновешенных весов не представляет труда: отношение масс обратно пропорционально отношению плеч. Масса грузика известна хорошо – это же пятиграммовая гирька.

Порядок расчетов почти очевиден: по измеренным данным нужно будет построить зависимость времени образования капли от массы кубика, а там посмотрим!

Теперь измерения. Результаты в таблицу: n - номер капли, t_n - время отрыва капли; $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ - время образования капли; m - масса льдинки после падения очередной капли. Рядом сразу пару графиков.

Таблица результатов измерений.

n	t_n, c	τ_n	m
0	0		4,61
1	74	74	4,50
2	146	72	4,36
3	221	75	
4	296	75	4,14
5	372	76	
6	453	81	
7	534	81	
8	624	90	3,92
9	713	89	
10	809	96	3,75
11	903	94	
12	1005	102	3,56
13	1108	103	
14	1218	110	3,37
15	1327	109	
16	1440	113	3,17
17	1557	117	
18	1675	118	2,92
19	1792	117	
20	1915	123	2,73
21	2026	111	
22	2148	122	2,51
23	2273	125	
24	2400	127	2,29
25	2531	131	
26	2671	140	2,06



Судя по первому графику, капли падают регулярно – красивая гладкая, но нелинейная функция. Второй график, мягко говоря, оставляет желать лучшего!

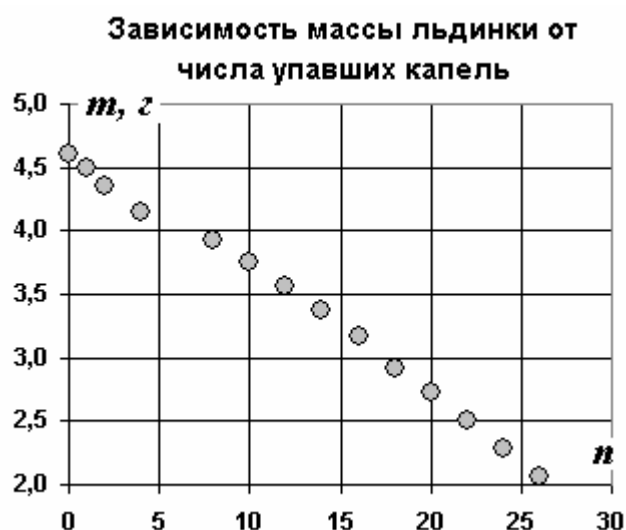
Очевидно, что зависимость времени образования капли от массы льдинки будет не лучше – попробую.

Понятно, что по этому графику можно сделать единственный обоснованный вывод – чем больше кусочек льда, тем быстрее образуется капля. С такими результатами я уже сталкивался и причина такой свистопляски уже понятна – время образования капли рассчитана как разность между измеренными значениями времен отрыва. По этому графику получить решение последнего (как я понимаю – основного) пункта задачи не удастся.



Не надо было сразу прыгать в конец задачи: пункты 2-3 вставлены не только для удлинения задачи. Теперь понятно – надо найти зависимость массы льдинки от числа упавших капель, аппроксимировать ее и дальше использовать массу льдинки, рассчитанную по этой усредненной зависимости⁹. Построю эту зависимость – масса льдинки от числа упавших капель.

Так природу не обманешь – после седьмой капли я отвлекся, при этом, наверно, ошибся в подсчете капель (вот тебе и без погрешностей). Но дальше – практически идеальная линейная зависимость. Что это означает? Все капли одинаковы! Заранее не очевидно, но правдоподобно – капля висит на своей шейке и ее размер практически не зависит от размера льдинки. Поэтому первые семь измерений отброшу, и буду считать восьмую каплю первой. Надо перестроить график, и по методу наименьших квадратов определить параметры линейной зависимости.



⁹ Прделанная дома самостоятельная работа не прошла напрасно – стремление избежать использования разностей похвально!

Прекрасная зависимость (если бы все были такими). Параметры этой зависимости

$$m = m_0 - \mu n, \quad (1)$$

начальная масса льдинки $m_0 = (4,07 \pm 0,05) \text{ г}$;

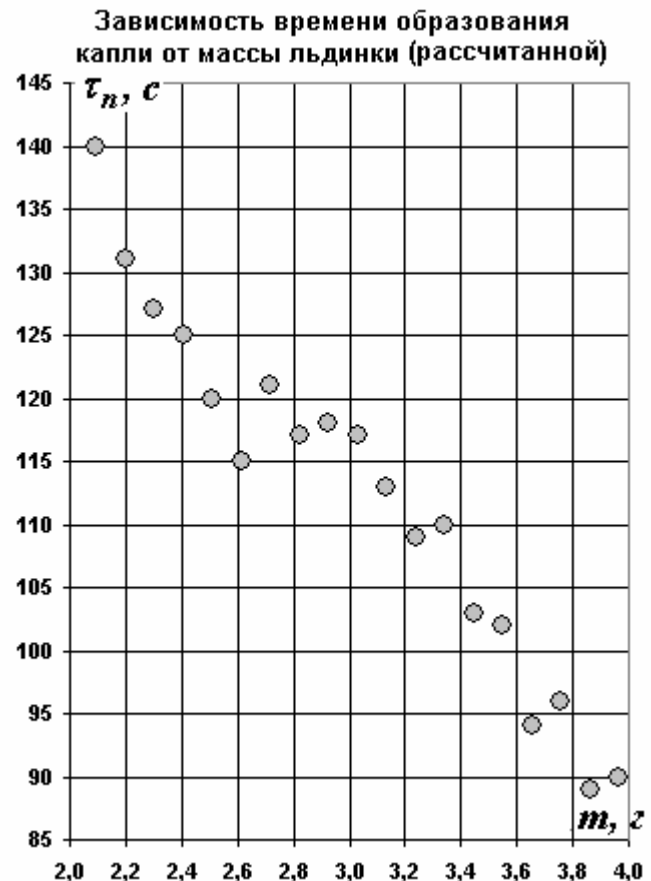
средняя масса капли $\mu = (0,104 \pm 0,004) \text{ г}$.

Кстати, вывод к п.3: так как зависимость массы льдинки от числа упавших капель линейна, то массы капель можно считать одинаковыми.

Теперь можно построить зависимость времени образования капли от массы льдинки, только сейчас использую рассчитанную по формуле (1) массу льдинки! Еще одно преимущество – будут использованы все измеренные времена отрыва капель. Как обычно – сначала табличку, рядом график.

Таблица 2.

n	$t_n, \text{ с}$	τ_n	m (изм.)	m (расч.)
0	0			4,07
1	90	90	3,92	3,97
2	179	89		3,86
3	275	96	3,75	3,76
4	369	94		3,65
5	471	102	3,56	3,55
6	574	103		3,45
7	684	110	3,37	3,34
8	793	109		3,24
9	906	113	3,17	3,13
10	1023	117		3,03
11	1141	118	2,92	2,93
12	1258	117		2,82
13	1379	121	2,73	2,72
14	1494	115		2,61
15	1614	120	2,51	2,51
16	1739	125		2,41
17	1866	127	2,29	2,30
18	1997	131		2,20
19	2137	140	2,06	2,09



Конечно, лучше, чем в первой попытке, но все же - не радует! Движемся дальше: если эта зависимость степенная $\tau = C m^\gamma$, то для определения показателя степени ее нужно построить в логарифмическом масштабе

$$\ln \tau = \ln C + \gamma \ln m. \quad (2)$$

А кто теоретическую модель будет строить? Может и получится то, что надо – а что надо? Рассуждаю. Лед плавится потому, что поступает теплота от воздуха (а раньше все в воздух уходило; может здесь говорить о холоде, который уходит в воздух¹⁰). Поток теплоты пропорционален разности температур, но здесь она не изменяется! Еще от чего зависит этот поток? От площади соприкосновения, от площади поверхности льдинки. А как она зависит от массы, или проще от объема льдинки? Для кубика очень просто:

$$V = a^3, \quad S = 6a^2, \quad \Rightarrow \quad S = 6V^{2/3}.$$

Но при плавлении форма изменяется, почти до шарика. Найду связь между площадью поверхности и объемом шарика:

¹⁰ Явно - это шутка!

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad S = 4\pi R^2, \quad \Rightarrow \quad S = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 4,8V^{\frac{2}{3}}.$$

Очевидно, что для тела любой формы площадь поверхности пропорциональна объему в степени $\frac{2}{3}$, но коэффициент пропорциональности зависит от формы. Ладно, будем считать, что форма льдинки изменяется несущественно, поэтому будем считать, что площадь поверхности, следовательно, и поток теплоты от воздуха к льдинке пропорционален массе в степени $\frac{2}{3}$. Скажу, что я дальтоник – кубик от шарика не отличаю! Так как масса капелек остается постоянной, то на ее образование требуется одно и то же количество теплоты, поэтому время образования одной капли должно быть обратно пропорционально массе в степени $\frac{2}{3}$, то есть

$$\tau = Cm^{-\frac{2}{3}}.$$

Попробуем! Предыдущую зависимость перестроим в логарифмическом масштабе, и по МНК определим показатель степени.



Не слишком прямая. Но если рассчитать коэффициент наклона (то есть показатель степени), то получим:

$$\gamma_0 = -(0,61 \pm 0,13).$$

Можно и обрадоваться – построенный диапазон накрыл ожидаемое значение $-0,67$, но погрешность великовата. Кроме того, график похож на ступеньку. Если провести прямую по последним точкам на графике (обозначу ее цифрой 1), то у нее наклон заметно больше и равен

$$\gamma_1 = -(1,0 \pm 0,2).$$

То есть в этой области время образования капли обратно пропорционально массе тающей льдинки! Можно еще добавить – провести прямую по первым точкам (номер 2 на графике), то у нее наклон равен

$$\gamma_2 = -(0,8 \pm 0,2).$$

Вывод? Еще ничего не ясно, но намеки обнадеживают!

Опять я упираюсь в неистребимое стремление работать с разностями! Если я избавился от разностей измеренных масс, то зачем оставлять разности времен! Надо обрабатывать зависимость массы льдинки от времени, тем более что все данные для этой зависимости уже есть в таблице 2! Эх, столько времени зря потерял!

Все это хорошо, но какая должна быть эта зависимость?

Сначала построю и посмотрю на нее. Красивая гладкая зависимость – картинка! И видно, что не линейная! Какой же функцией ее можно описать? Рассуждаю. Буду считать, что моя гипотеза о степени $\frac{2}{3}$ верна.

Тогда, чтобы найти зависимость массы от времени мне надо просуммировать времена образования нескольких капель: время образования n -ой капли

$$\tau_n = C m^{-2/3} = C(m_0 - (n-1)\mu)^{-2/3}. \text{ А как}$$

их суммировать? Идея! Зачем суммировать? Поток теплоты пропорционален массе в степени $\frac{2}{3}$; значит, я могу записать скорость изменения массы льда:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -A m^{2/3}. \quad (3)$$

Отсюда, наверное, можно найти зависимость массы от времени (начальную массу я знаю). Но если решу это уравнение получу, что масса льдинки изменяется непрерывно, а у меня скачками? Ну и что – в эксперименте лед плавится тоже непрерывно, это капли срываются скачками, какая разница непрерывно убирать воду с льдинки, или она немножко повисит и сама сорвется – никакой! Поэтому уравнение (3) должно правильно описывать полученную экспериментальную зависимость. Осталось мелочь – решить уравнение (3). Надо угадать решение и доказать, что угадал правильно. Рассуждаю. Решение искать в виде степенной функции $m = Bt^\beta$? Не пойдет: во-первых, при $t = 0$ масса равна $m = m_0$; во-вторых, капля тает за какое-то время T - степенная функция этим условиям удовлетворить не может. А какая может? Линейная $m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ - красиво: при

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0 \quad m &= m_0 \\ \text{при } t = T \quad m &= 0 \end{aligned}$$

только зависимость не должна быть линейной, потому что скорость плавления не постоянна. Выполнение граничных условий обеспечивает скобка, если я ее возведу в какую-нибудь степень, то эти условия все равно будут выполняться. Попробую

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\beta. \quad (4)$$

Надо эту функцию подставить в уравнение (там же слева стоять производная – как будто я этого не знаю). Беру производную и подставляю:

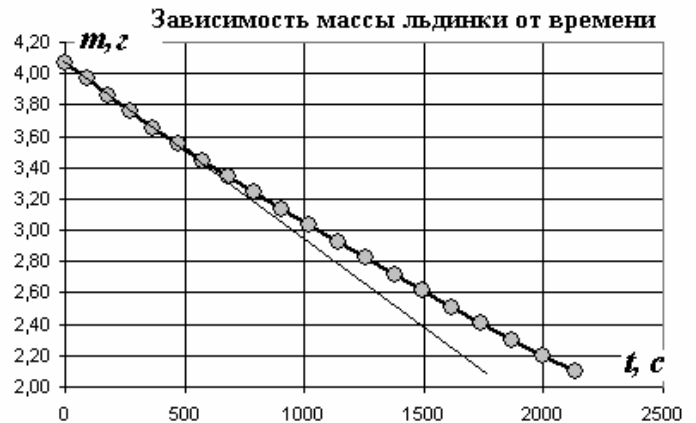
$$\begin{aligned} m_0 \beta \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\beta-1} \left(-\frac{1}{T}\right) &= -A \left(m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\beta\right)^{2/3} \Rightarrow \\ \frac{m_0 \beta}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\beta-1} &= A m_0^{2/3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{2/3\beta} \end{aligned}$$

Теперь приравняю показатели степеней

$$\beta - 1 = \frac{2}{3}\beta \Rightarrow \beta = 3,$$

так просто, интересно!

Приравниваю коэффициенты при скобках и нахожу время плавления капли:



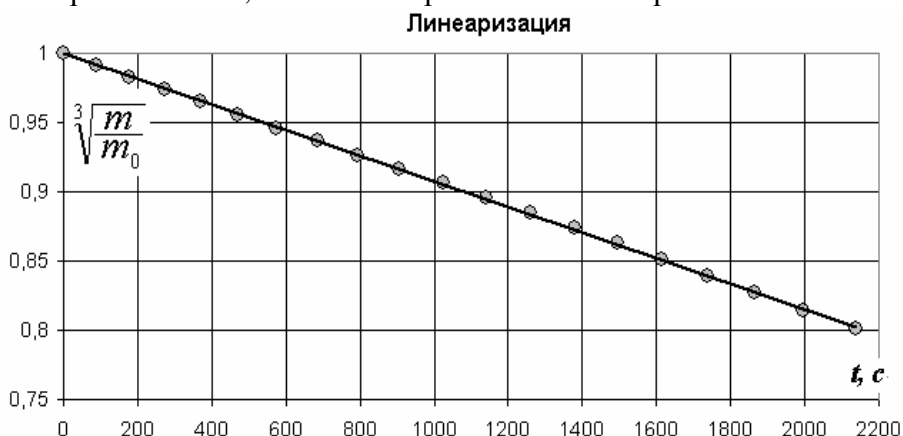
$$T = \frac{\beta}{A} \sqrt[3]{m_0},$$

то же интересно, но мне эта формула не нужна. Ура, уравнение (3) решено:

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3. \quad (5)$$

Как понять эту формулу? Корень кубический из массы линейно убывает со временем, но корень кубический из массы пропорционален радиусу шарика (или кубика). Так это сразу можно было сообразить: на малый участок поверхности попадает постоянный поток теплоты, пропорциональный ее площади, поэтому толщина расплавившегося слоя линейно убывает со временем. Которое у меня катастрофически убывает! Зачем было решать это уравнение, думать надо, а то повел себя как последний теоретик! Зато знаю, как проверить свою гипотезу: построить график зависимости корня кубического из массы от времени – если получится прямая линия, то все мои размышления верны. Все можно строить зависимость:

$$\sqrt[3]{\frac{m}{m_0}} = 1 - \frac{t}{T}.$$



Готово – это победа!

Никто не возразит, что это прямая линия!

Таким образом, экспериментально подтверждено, что поток теплоты, поступающий от воздуха к льдинке пропорционален площади ее поверхности, поэтому время образования капли пропорционально массе капли в степени $\gamma = \frac{2}{3}$.

Для скептиков, могу добавить. Обработывая линеаризованную зависимость по МНК, находим ее коэффициент ее наклона $\frac{1}{T} \approx 9,24 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$. Интересно, что время плавления

льдинки $T \approx 1,08 \cdot 10^4 \text{ c} \approx 3 \text{ часа}$ - но, по-моему, она раньше растаяла - жаль, не посмотрел, но полчаса точно висела! Наконец, построю график зависимости массы капли от времени: теоретический, с нанесенными экспериментальными данными – любуйтесь!



Домашняя работа.

Конечно, получилось здорово. Правда возникает небольшое сомнение – в зависимость массы от времени я сразу заложил третью степень. А если там степень немного другая? Надо попробовать проанализировать результаты измерений при произвольном показателе этой степени, то есть заложить

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\beta. \quad (6)$$

Теперь надо разработать такую процедуру, что бы можно было этот показатель степени рассчитывать (или хотя бы оценивать). Линеаризация этой зависимости видна – логарифмический масштаб:

$$\ln \frac{m}{m_0} = \beta \ln \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad (7)$$

но построить эту линеаризованную зависимость я не могу, так как надо подгонять величину параметра T (понятно, что для наилучшей подгонки он должен зависеть от показателя β). Значит, сначала надо определять наилучшее значение этого параметра. Для этой цели замечательна такая линеаризация

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^{1/\beta} = 1 - \frac{t}{T}. \quad (8)$$

Но чтобы построить эту зависимость надо знать показатель степени β . Замкнутый круг. А как провести такую линеаризацию, чтобы по ней определить и показатель степени, и время таяния T не видно, похоже, что и невозможно.

Какой же выход? Остается последний – метод «научного тыка»: буду задавать различные степени (сам, методом подбора), затем по линеаризации (8) с помощью МНК определять значение параметра T (или $a = \frac{1}{T}$), и, наконец, смотреть насколько выбранное

значение показателя степени соответствует экспериментальным данным, то есть сравнивать теоретическую зависимость (6) с экспериментальными данными. Только, пожалуй, лучше проводить сравнение по линеаризованной зависимости (7) – прямую от кривой отличить легче, чем кривую от кривой!

Теперь, все данные в Excel, в отдельной ячейке задать показатель степени, построить зависимость (8), ее график, определить параметр T , потом график зависимости (7) и посмотреть!

Начнем с простейшего случая – всякая неизвестная постоянная равна единице! И так, $\beta = 1$, поэтому строю линейную

зависимость $\frac{m}{m_0}$ от времени t . Не

очень она и линейная, хорошо видна вогнутость функции. А зачем, я ее построил, она же и раньше была нарисована, только тогда я проводил касательную к начальному участку этой кривой. Но проверка тоже не помешает! Хотя, во время апелляции эта кривая и за прямую тоже может сойти!

Кстати о прямых – сколько можно сравнивать «на глаз», какая прямая прямее! Надо придумать что-нибудь более серьезное, какой-нибудь численный критерий сравнения. Порассуждаем: непосредственно измерялись времена отрыва капель t_n



($n = 1, 2, \dots, N$ - номер капли), следовательно, предпочтительнее сравнивать эти измеренные времена с теоретически рассчитанными \tilde{t}_n . Чем меньше они различаются, тем лучше. Но что означает «меньше различаются»? Рассматривать максимальную разницу – не очень хорошо, в этом случае одна неудачная экспериментальная точка может привести к такому отклонению, что на все остальные можно и не смотреть! Нужна общая суммарная характеристика:

- сумма всех отклонений? – плохо, так как одни отклонения положительны, а другие отрицательны, тогда и очень большие отклонения могут компенсировать друг друга;

- сумма модулей отклонений – лучше, но почему сумма модулей? Во всех формулах для расчета случайных погрешностей стоят суммы квадратов отклонений, почему здесь должно быть по-другому?

- конечно, сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от теоретической зависимости – вот критерий сравнения:

$$S^2 = \sum_{n=1}^N (t_n - \tilde{t}_n)^2.$$

Замечательно, но для наглядности усреднить эту сумму (средний квадрат отклонения) и ... извлечь корень – среднеквадратичное отклонение, это же очень наглядная и понятная величина! Итак, критерием качества подгонки (красивое название!) может выступить среднеквадратичное отклонение¹¹

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (t_n - \tilde{t}_n)^2}{N}}. \quad (9)$$

Осталась мелочь: как рассчитать теоретические значения времен отрыва капель. Зависимость массы капли от времени давно получена: $m = m_0 - \mu n$, и даже параметры ее найдены, подставляем ее в выражение (8)

$$\left(\frac{m_0 - \mu n}{m_0}\right)^{1/\beta} = 1 - \frac{t}{T},$$

и записываем формулу для расчета времени отрыва

$$\tilde{t}_n = T \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{m_0} n \right)^{1/\beta} \right]. \quad (10)$$

Вот теперь я вооружен по настоящему, порядок действий строго и понятен:

1) выбираю (почти наугад) значение параметра β ;

2) строю зависимость $\left(\frac{m}{m_0}\right)^{1/\beta}$ от времени t , смотрю, на сколько она линейна;

3) по МНК определяю параметры этой «линейной» зависимости (8), нахожу значение T ;

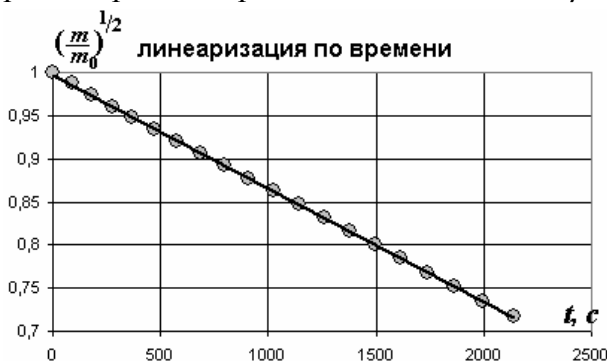
4) рассчитываю среднеквадратичное отклонение (9) экспериментальных точек от теоретических значений, рассчитанных по формуле (10);

5) выбираю такое значение показателя степени β , при котором s минимальна.

¹¹ Пройдя «простым логическим путем» наш юный экспериментатор построил замечательный критерий сравнения различных теоретических моделей. Отметим, что основной (и действительно обоснованной) идеей такого построения является сравнение величин непосредственно (прямо) измеренных с теоретическими значениями. В принципе, не слишком существенно, какую именно величину следует выбирать в качестве критерия сравнения, не намного хуже и среднее значение модулей отклонения. Однако, построенное среднеквадратичное отклонение фактически является оценкой случайной погрешности прямых измерений времен, поэтому чаще всего в серьезных экспериментах используется именно она!

Не вредно также посмотреть на график зависимости отклонений $(t_n - \tilde{t}_n)$ от номера капли – по нему можно прикинуть, являются ли эти отклонения закономерными или случайными.

Теперь займемся подбором и его проверкой. Линейную зависимость $\beta = 1$ я уже рассмотрел и отбросил. Пойдем дальше: $\beta = 2$.



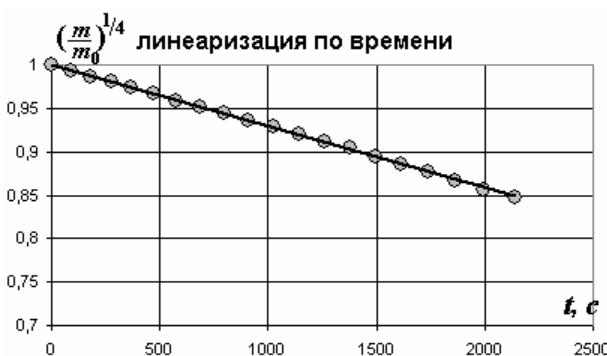
Красиво – «на глаз» линейризованная зависимость массы от времени почти идеальна. Но на графике зависимости отклонений от номера капли видно, что все они в одну сторону. А численные параметры: время таяния $T = 7598c \approx 2 \text{ часа}$, среднеквадратичное отклонение $s \approx 21c$ – не много, особенно на фоне 2000 с.

Пробуем $\beta = 3$.



«На глаз» линейризация опять практически идеальна, зато отклонения, во-первых, меньше, во-вторых, имеют разные знаки! Численные характеристики: время таяния $T = 10800c \approx 3 \text{ часа}$ (не существенно), среднеквадратичное отклонение $s \approx 9,7c$ – ну это же в два раза меньше!

Еще одно значение $\beta = 4$:

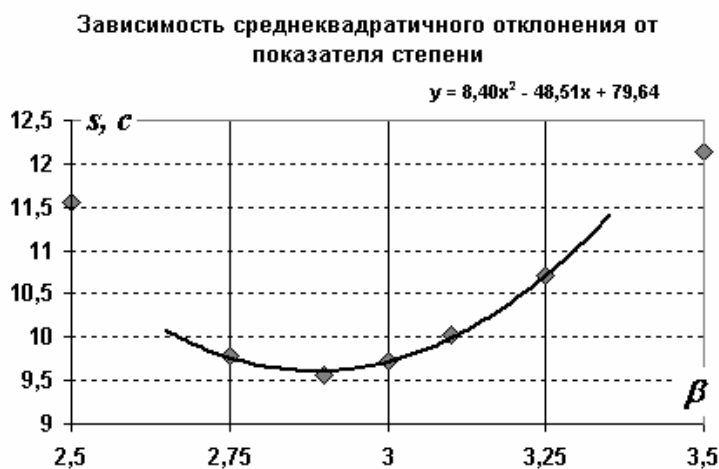


Опять «линейризация» почти идеальна, но отклонения ушли в другую сторону, да и среднеквадратичное отклонение возросло: $s \approx 15c$. Явно завышенное значение показателя степени!

На этом можно и остановиться – показано, показателе степени $\beta = 3$ теоретическая кривая лучше описывает экспериментальные данные, чем при $\beta = 2$ и $\beta = 4$. Однако, существуют и дробные показатели, почему бы не проверить и их? Тем более, что

компьютер позволяет провести эти расчеты практически мгновенно! Поэтому продолжим. Нет смысла приводить графические иллюстрации для показателей близких к трем, поэтому ограничимся табличкой, в которой представим значения среднеквадратичного отклонения для различных показателей, приближающихся к трем. Можно эти данные даже представить на графике.

β	s, c
2,50	11,55
2,75	9,78
2,90	9,57
3,00	9,72
3,10	10,02
3,25	10,70
3,50	12,14



А еще в Excel'е есть замечательная возможность построить аппроксимацию зависимости. В данном случае меня интересует положение минимума: при каком значении показателя степени среднеквадратичное отклонение минимально. Прошу построить квадратичную функцию и показать ее уравнение на диаграмме – готово. Теперь без труда определяю показатель степени, при котором рассматриваемая функция минимальна:

$$\beta^* = \frac{48,51}{2 \cdot 8,48} \approx 2,9.$$

Конечно, это не совсем три, но очень близко к нему (различие можно списать на погрешности измерения). Таким образом, теоретическая модель плавления, выражающаяся зависимостью массы льдинки от времени

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3,$$

оказывается подтвержденной экспериментально. Следовательно, предположение о том, что поток теплоты из воздуха на льдинку пропорционален площади ее поверхности, подтвердилось.

P.S. И все-таки жаль, что нет возможности пользоваться компьютером во время экспериментального тура олимпиады – за отведенное время такие расчеты на калькуляторе не проведешь!

На этом мы расстаемся с нашим талантливым школьником, выполнившим (естественно, с нашей помощью) такой громадный объем работы и поднявшимся на новую ступень в умении решать сложные экспериментальные задачи!

3.9 Так, что же такое «хорошая экспериментальная задача»?

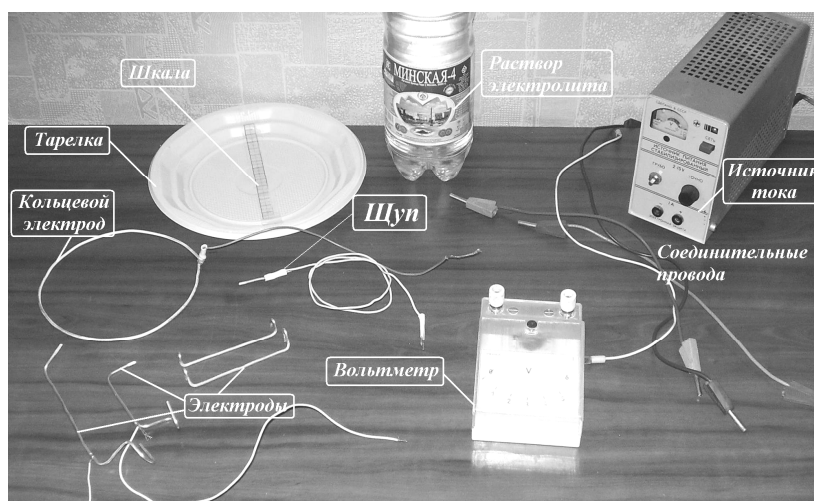
Еще в первой части данной книги были сформулированы общие требования, предъявляемые к экспериментальным заданиям олимпиад. Не все рассмотренные ранее задачи полностью удовлетворяют этим требованиям – одни слишком просты, другие требуют громоздкой математической обработки, третьи не допускают однозначного толкования полученных результатов. В заключение этой части мы подробно опишем задачу, которая, на наш взгляд, является одной из лучших, предлагавшихся на белорусских физических олимпиадах.



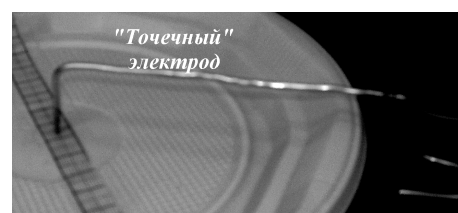
Задача 19. «Электрический ток в тарелке»

Оборудование:

источник тока напряжением 9,0 В (допустимо использовать две батарейки 4,5 В); вольтметр (мультиметр); соединительные провода; ключ электрический, алюминиевые электроды различной формы (кольцевой, два линейных, два «точечных»); алюминиевый щуп, штангенциркуль, тарелка с закрепленной шкалой, бутылка минеральной воды.



При протекании электрического тока в некоторой среде распределение токов (описываемое вектором плотности тока \vec{j}) совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля \vec{E} , поэтому, изучая распределение токов, можно делать выводы о структуре электрического поля. В данном задании в качестве среды используется раствор электролита (минеральная вода).



В области контакта электролита с металлическими электродами образуется двойной ионный слой, обладающий заметным электрическим сопротивлением, поэтому в области этого слоя происходит заметный скачок потенциала. Величина этого скачка зависит от материала электродов, вида электролита и полярности электрода. В данной работе вам обязательно необходимо учитывать этот скачок, поэтому его следует экспериментально исследовать.

Во всех упражнениях вам предстоит исследовать пространственное распределение потенциала: зависимость потенциала от расстояния до положительного электрода.

**Примем потенциал отрицательного электрода равным нулю.
Расстояния следует отсчитывать от положительного электрода.**

0. Изобразите электрическую схему, позволяющую измерять зависимость электрического потенциала от расстояния до положительного электрода.

Часть 1. Параллельные электроды.

Расположите в тарелке два линейных электрода параллельно друг другу, залете их электролитом (электролит должен покрывать электроды, но не касаться места соединения алюминиевого электрода с соединительным проводом).

1.1 Исследуйте зависимость потенциала от расстояния до положительного электрода в области между электродами для двух различных расстояний между электродами. Постройте графики полученных зависимостей.

1.2 Используя полученные данные, определите скачки потенциала $\Delta\varphi_{(+)}$ и $\Delta\varphi_{(-)}$ на положительном и отрицательном электродах.

1.3 Покажите, что результаты измерений для разных расстояний между электродами согласуются друг с другом.

Часть 2. Радиальное растекание.

Расположите в тарелке кольцевой электрод, а в ее центре «точечный» электрод (он должен быть положительным).

2.1 Исследуйте зависимость потенциала от расстояния до центрального электрода. Постройте график полученной зависимости.

2.2 Покажите, что распределение потенциала при радиально симметричном распределении электрического тока может быть описано формулой.

$$\varphi(r) = A + B \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (1)$$

где r_0 - эффективный радиус¹² центрального электрода.

Найдите значения постоянных коэффициентов A, B , используя данные, полученные в Части 1.

2.3 На основании результатов измерений проверьте справедливость формулы (1) в данном эксперименте. Определите экспериментальные значения коэффициентов.

2.4 Определите эффективный радиус электрода r_0 .

Часть 3. Два «точечных» источника.

Расположите два «точечных» электрода на линейке близко к ее краям.

3.1 Исследуйте распределение потенциала вдоль прямой, соединяющей центры электродов. Постройте график полученной зависимости.

3.2 Покажите, что в данном случае распределение потенциала может быть описано формулой

$$\varphi(r) = A + B \ln\left(\frac{l-r}{r}\right), \quad (2)$$

где r - расстояние до положительного электрода, l - расстояние между центрами электродов.

Найдите значения коэффициентов A, B в формуле (2), используя данные, полученные в Части 1 и 2.

¹² Из-за наличия области двойного слоя эффективный радиус незначительно превышает радиус самого электрода.

3.3 На основании проведенных измерений проверьте применимость формулы (2) в данном случае. Определите экспериментальные значения коэффициентов A, B в формуле (2).

Комментарии к условию задачи.

1. В качестве измерительного прибора предпочтительнее использовать электронный мультиметр. При использовании школьного вольтметра точность измерений не позволяет получить столь хорошее соответствие между экспериментальными и теоретическими результатами, хотя основной рассматриваемый эффект – появление скачка потенциала вблизи электродов, четко проявляется и в этом случае. *При использовании школьного вольтметра удобнее измерять расстояние, на котором потенциал принимает определенное значение, фиксируемое вольтметром.*

2. Электроды различной формы следует изготовить из кусков алюминиевой проволоки, кольцевой электрод должен размещаться на дне тарелки вблизи его краев.

3. Шкалу на дне тарелки можно изготовить из полоски миллиметровой бумаги, прикрепив ее по диаметру тарелки с помощью скотча, который должен полностью закрывать шкалу, предохраняя ее от раствора.

4. Ток через раствор должен проходить только во время измерений, так как при длительном протекании тока из-за электролиза его электрические свойства изменяются. Также необходимо контролировать постоянство напряжения источника тока.

Обсуждение и решение.

В данной задаче исследуется протекание тока в протяженной среде, в отличие от традиционного изучения цепей со сосредоточенными параметрами. Электрические характеристики такой системы существенно зависят от формы токоподводящих электродов потому, что их форма определяет пространственное распределение токов. Именно пространственное распределение токов определяет распределение потенциала в среде, которое необходимо исследовать. Как сказано в условии, это распределение потенциала полностью совпадает с электростатическим (если электроды заменить на соответствующие постоянные заряды). Однако при протекании электрического тока через электролит вблизи электродов концентрации ионов резко изменяются, что и приводит к возникновению двойного электрического слоя с большим электрическим сопротивлением, что проявляется в возникновении заметного скачка потенциала¹³. Подчеркнем, что оба электрода одинаковы, поэтому никакой гальванической ЭДС между ними не возникает, и только при подключении источника электроды оказываются в неравных условиях – один положительный, второй отрицательный. Помимо возникновения скачков потенциала этот слой проявляется в некотором эффективном увеличении диаметра точечного электрода, этот эффект также должен быть обнаружен и учтен при обработке результатов измерений. Приступим к последовательному изложению результатов измерений и их обработки. В тексте решения комментарии выделены курсивом.

0. Принципиальная схема, предназначенная измерения зависимости потенциала от расстояния до положительного электрода, показана на рис.1. Схема очевидна и не требует дополнительных пояснений.

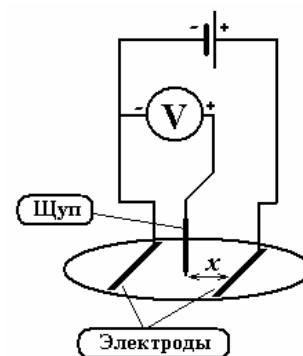


Рис. 1

¹³ Этот же эффект изучался в задаче 15 данной книги.

Часть 1. Параллельные электроды.

Результаты измерений зависимости потенциала $\varphi(x)$ от расстояния x до положительного электрода при двух различных расстояниях между электродами l представлены в Таблице 1.

Обратите внимание – измерения проведены во всем диапазоне изменения величины x , с малым шагом 0,5 см.

Таблица 1.

x , см	Распределение потенциала $\varphi(x)$	
	Расстояние между электродами $l = 9,0$ см	Расстояние между электродами $l = 7,0$ см
0,5	7,12	7,05
1	6,76	6,52
1,5	6,34	6,01
2	5,93	5,49
2,5	5,47	4,98
3	5,06	4,43
3,5	4,67	3,93
4	4,26	3,42
4,5	3,85	2,91
5	3,45	2,37
5,5	3,09	1,88
6	2,71	1,41
6,5	2,31	0,9
7	1,92	
7,5	1,55	
8	1,16	
8,5	0,75	

Графики полученных зависимостей показаны на Рис. 2.

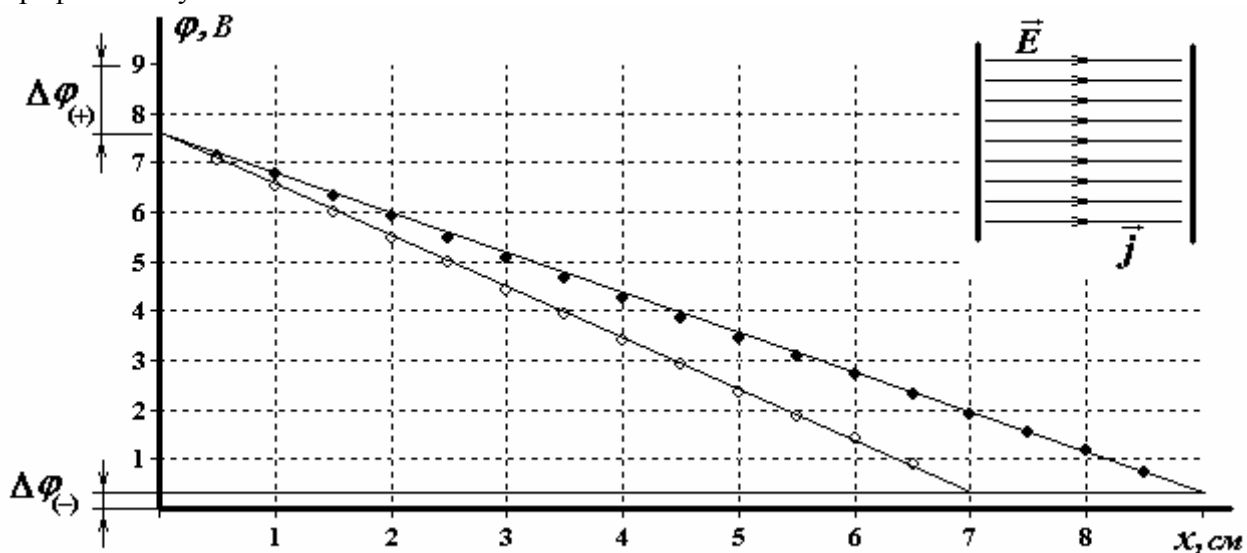


Рис. 2

Как и следовало ожидать, полученные зависимости являются линейными, так как линии тока в данном случае параллельны, что соответствует примерно постоянной напряженности электрического поля в пространстве между электродами.

1.2 Полученные зависимости являются линейными, описываемыми функциями

$$\varphi(x) = ax + b. \quad (1)$$

Коэффициенты этих зависимостей могут быть найдены различными способами, наиболее точный из которых – метод наименьших квадратов. Предельное значение $\varphi(x \rightarrow 0)$ отлично от напряжения источника U_0 , в чем проявляется наличие скачка потенциала вблизи положительного электрода. Поэтому величина этого скачка равна

$$\Delta\varphi_{(+)} = U_0 - \varphi(0) = U_0 - b. \quad (2)$$

Аналогично, предельное значение $\varphi(x \rightarrow l)$ отлично от нуля, в чем проявляется наличие скачка потенциала вблизи отрицательного электрода. Поэтому величина этого скачка равна

$$\Delta\varphi_{(-)} = \varphi(l) = al + b. \quad (3)$$

В Таблице 2 представлены расчеты по МНК параметров линейных зависимостей (1) и их погрешностей, а также величины скачков потенциалов (и их погрешности), найденные по формулам (2)-(3).

Таблица 2.

$l, \text{ см}$	$a, \frac{\text{В}}{\text{см}}$	$b, \text{ В}$	$\Delta\varphi_{(+)}, \text{ В}$	$\Delta\varphi_{(-)}, \text{ В}$
9 см	$-0,80 \pm 0,02$	$7,49 \pm 0,05$	$1,51 \pm 0,06$	$0,30 \pm 0,05$
7 см	$-1,03 \pm 0,03$	$7,54 \pm 0,04$	$1,46 \pm 0,06$	$0,33 \pm 0,04$

1.3 Полученные для разных расстояний между электродами полностью согласуются друг с другом по следующим характеристикам:

- обе зависимости линейны;
- найденные значения скачков потенциала в пределах погрешности совпадают.

Часть 2. Радиальное растекание.

2.1 Радиус центрального электрода $r_0 = 1,2 \text{ мм}$, радиус кольцевого электрода $R = 6,5 \text{ см}$.

Результаты измерений зависимости потенциала от расстояния до центра центрального электрода представлены в Таблице 3 и на рис. 3.

Таблица 3.

$r, \text{ см}$	$\varphi, \text{ В}$
0,5	5,43
1	3,87
1,5	3,01
2	2,41
2,5	1,99
3	1,65
3,5	1,37
4	1,14
4,5	0,92
5	0,73
5,5	0,56
6	0,41

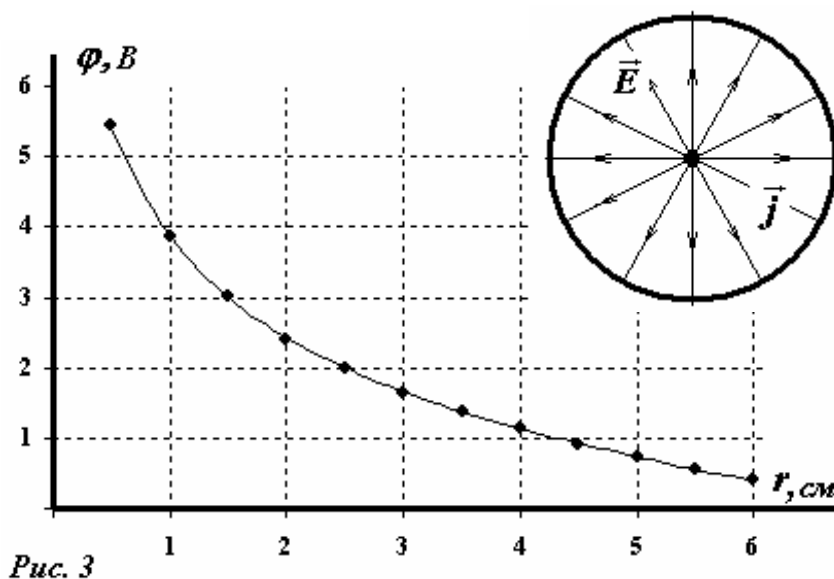


Рис. 3

2.2 Так как распределение токов является радиально симметричным, то зависимость плотности тока от расстояния до центральной точки будет обратно пропорциональной $j \propto \frac{a}{r}$. По закону Ома такой же будет зависимость напряженности поля от расстояния

$E = \frac{a}{r}$. Распределение потенциала можно найти, проинтегрировав выражение для напряженности по расстоянию

$$\Delta\varphi = -\int_{r_0}^r E dr = -a \ln \frac{r}{r_0},$$

то есть зависимость является логарифмической, приведенной в условии.

Параметры этой зависимости определяются граничными условиями:

- при $r = r_0$ (r_0 - радиус центрального электрода) потенциал равен $\varphi(r_0) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)}$;

- при $r = R$ (R - радиус кольцевого электрода) потенциал равен $\varphi(R) = \Delta\varphi_{(-)}$.

Из этих условий следует, что исследуемая зависимость имеет вид

$$\varphi(r) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \Delta\varphi_{(-)}}{\ln \frac{R}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} \quad (4)$$

то есть параметры зависимости $\varphi(r) = A + B \ln \frac{r}{r_0}$ выражаются через характеристики системы следующим образом

$$A = U_0 - \Delta\varphi_{(+)}; \quad B = -\frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \Delta\varphi_{(-)}}{\ln \frac{R}{r_0}}. \quad (5)$$

2.3 Построим зависимость потенциала φ от $\ln \frac{r}{r_0}$, где в качестве $r_0 = 0,12$ см возьмем

радиус центрального электрода (то есть пренебрежем толщиной двойного слоя возле него). График этой зависимости показан на Рис. 4.

Таблица 4.

$r, \text{ см}$	$\ln(r/r_0)$	$U, \text{ В}$
0,5	1,427116	5,43
1	2,120264	3,87
1,5	2,525729	3,01
2	2,813411	2,41
2,5	3,036554	1,99
3	3,218876	1,65
3,5	3,373027	1,37
4	3,506558	1,14
4,5	3,624341	0,92
5	3,729701	0,73
5,5	3,825012	0,56
6	3,912023	0,41

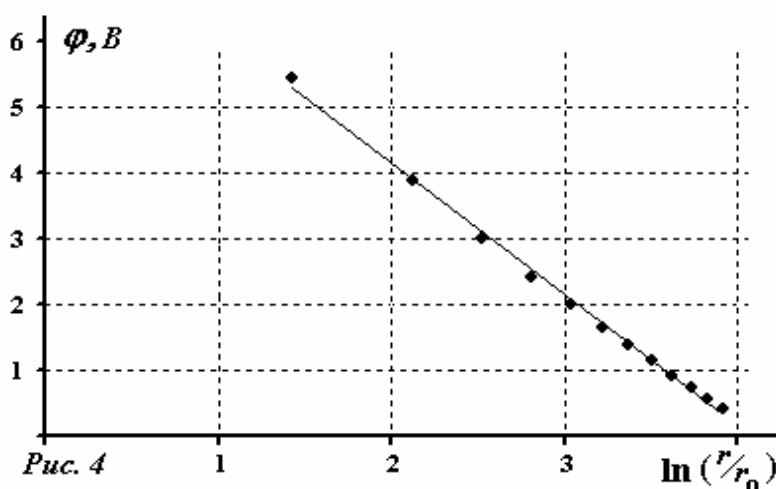


Рис. 4

Полученная зависимость оказалась линейной, что подтверждает справедливость приведенной в условии формулы (1).

Обработка данной зависимости методом наименьших квадратов приводит к следующим значениям коэффициентов

$$A = (8,1 \pm 0,2) B; \quad B = (-1,99 \pm 0,06) B$$

Найдем по этим данным скачки потенциалов на электродах:

$$\Delta\varphi_{(+)} = U_0 - \varphi(r_0) = U_0 - A = (0,9 \pm 0,2) B$$

$$\Delta\varphi_{(-)} = \varphi(R) = A + B \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) = (0,1 \pm 0,4) B$$

Значение скачка потенциала на центральном положительном электроде достоверно отличается от полученного в Части 1. Это отличие связано с тем, что не учтена толщина эффективного слоя.

2.4 Отличие полученных значений скачков потенциала связано с пренебрежением толщиной двойного слоя. Заметим, что значительная погрешность определения скачка потенциала у отрицательного электрода не позволяет использовать это значение для дальнейших расчетов, поэтому для определения эффективного радиуса r'_0 центрального электрода следует можно использовать только значение скачка потенциала у центрального электрода. Заметим, что на значение коэффициента B точное значение эффективного радиуса оказывает несущественное влияние, так как $\ln R \gg \ln r'_0$.

Преобразуем аппроксимирующую формулу к виду

$$\varphi = A + B \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = A + B \ln\left(\frac{r}{r'_0} \frac{r'_0}{r_0}\right) = A + B \ln\left(\frac{r}{r'_0}\right) + B \ln\left(\frac{r'_0}{r_0}\right),$$

приравняем ее к теоретической зависимости (4) (скачки потенциалов взяты из Части 1).

$$A + B \ln\left(\frac{r}{r'_0}\right) + B \ln\left(\frac{r'_0}{r_0}\right) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \Delta\varphi_{(-)}}{\ln\frac{R}{r'_0}} \ln\frac{r}{r'_0} \approx U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - B \ln\frac{r}{r'_0}.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\ln\left(\frac{r'_0}{r_0}\right) = \frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - A}{B} = \frac{9,0 - 1,5 - 8,1}{1,99} \approx 0,3,$$

или $r'_0 = r_0 \exp(0,3) \approx 1,65$ мм.

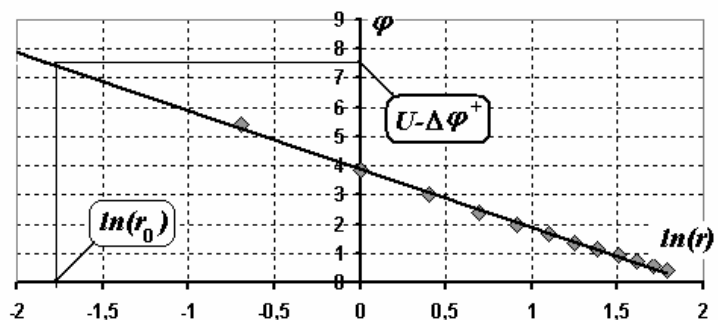
При таком значении эффективного радиуса электрода параметры экспериментальной зависимости равны

$$A = (7,5 \pm 0,2) B; \quad B = (-1,99 \pm 0,06) B.$$

Заметим, что коэффициент наклона практически не изменился. Зато измененное значение параметра приводит к значению скачка потенциала на положительном электроде равном $\Delta\varphi_{(+)} = U_0 - A \approx (1,5 \pm 0,2) B$, что согласуется с более точным значением, полученным в Части 1.

Если «не бояться» логарифмов размерных величин, то эффективный радиус электрода может быть определен графически. Для этого построим зависимость потенциала от логарифма расстояния до центра электрода (измеренного в см). Затем проводим горизонтальную прямую через значение потенциала

Графическое определение эффективного радиуса



на положительном электроде $(U_0 - \Delta\varphi_{(+)}) \approx 7,5B$, и определяем по графику, какому расстоянию r_0 соответствует это значение потенциала.

Часть 3. Два «точечных» источника.

3.1 Измерения проведены при расстоянии между электродами равным $l = 10 \text{ см}$.

Результаты измерений зависимости потенциала $\varphi(x)$ между двумя «точечными» электродами от расстояния до положительного электрода представлены в Таблице 5 и на рис. 5

Таблица 5.

$r, \text{ см}$	φ, B
0,5	6,7
1	5,97
1,5	5,5
2	5,18
2,5	4,87
3	4,62
3,5	4,41
4	4,2
4,5	4,01
5	3,8
5,5	3,6
6	3,42
6,5	3,22
7	2,97
7,5	2,71
8	2,46
8,5	2,19
9	1,83
9,5	1,38

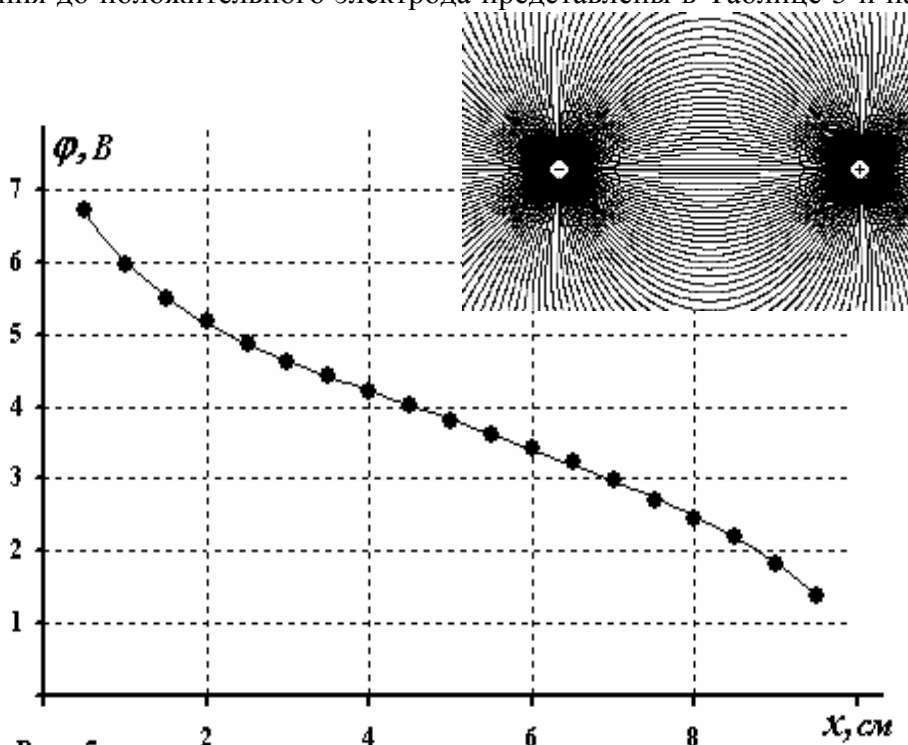


Рис. 5

3.2 В части 2 было показано, что распределение потенциала от одного точечного источника описывается логарифмической зависимостью. По принципу суперпозиции распределение потенциала при двух точечных источниках (один положительный, второй отрицательный) будет равно сумме потенциалов от каждого из этих источников, поэтому в этом случае

$$\Delta\varphi = -a \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + a \ln\left(\frac{l-r}{r_0}\right) = a \ln\left(\frac{l-r}{r}\right), \quad (6)$$

откуда и следует приведенная в условии формула (2).

Для определения параметров этой зависимости следует воспользоваться граничными условиями:

при $r = r_0$ значение потенциала $\varphi(r_0) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)}$;

при $r = l - r_0$ значение потенциала $\varphi(l - r_0) = \Delta\varphi_{(-)}$.

Из этих условий следует, что теоретические значения коэффициентов равны

$$A = \frac{(U_0 - \Delta\varphi_{(+)}) + \Delta\varphi_{(-)}}{2}; \quad B = \frac{(U_0 - \Delta\varphi_{(+)}) - \Delta\varphi_{(-)}}{2} \frac{1}{\ln \frac{l-r_0}{r_0}}. \quad (7)$$

3.2 Для проверки представленной зависимости линеаризуем зависимость, построив график зависимости потенциала φ от величины $z = \ln \frac{l-r}{r}$ (Рис. 6).

Таблица 6.

$r, \text{см}$	z	$\varphi, \text{В}$
0,5	2,944439	6,70
1	2,197225	5,97
1,5	1,734601	5,50
2	1,386294	5,18
2,5	1,098612	4,87
3	0,847298	4,62
3,5	0,619039	4,41
4	0,405465	4,20
4,5	0,200671	4,01
5	0	3,80
5,5	-0,20067	3,60
6	-0,40547	3,42
6,5	-0,61904	3,22
7	-0,8473	2,97
7,5	-1,09861	2,71
8	-1,38629	2,46
8,5	-1,7346	2,19
9	-2,19722	1,83
9,5	-2,94444	1,38

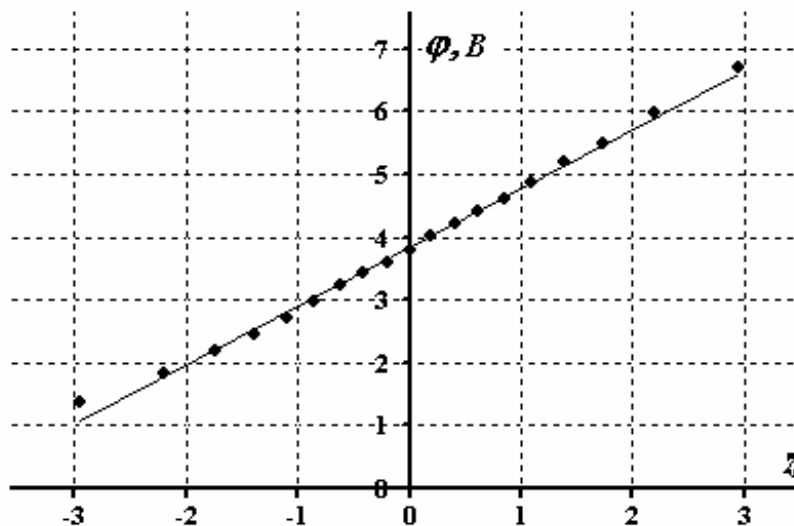


Рис. 5

Линейность полученной зависимости подтверждает применимость приведенной формулы.

Обработка по МНК приводит к следующим значениям коэффициентов зависимости

$$A = (3,82 \pm 0,02)B; \quad B = (0,95 \pm 0,02)V.$$

Рассчитаем теоретические значения этих параметров по формулам (7), с использованием значений скачков потенциалов, найденных в Части 1:

$$\tilde{A} = (3,9 \pm 0,1)B; \quad \tilde{B} = 0,87 V.$$

Соответствие значений для параметра A полное, незначительное различие в значениях параметра B обусловлено низкой точностью определения эффективного радиуса электрода. Кроме того, возможно, что толщины двойных слоев различны для разных электродов.

Поэтому, в целом, соответствие следует признать удовлетворительным.

Для подтверждения правильности сделанных предположений и проведенных расчетов приведем график теоретической зависимости с параметрами, определенными по данным частей 1 (скачки потенциала) и 2 (эффективный радиус электродов), с нанесенными экспериментальными значениями части 3 (Рис. 6).

График демонстрирует лучшее, чем хорошее соответствие между этими данными.

Сравнение экспериментальных данных с расчетными

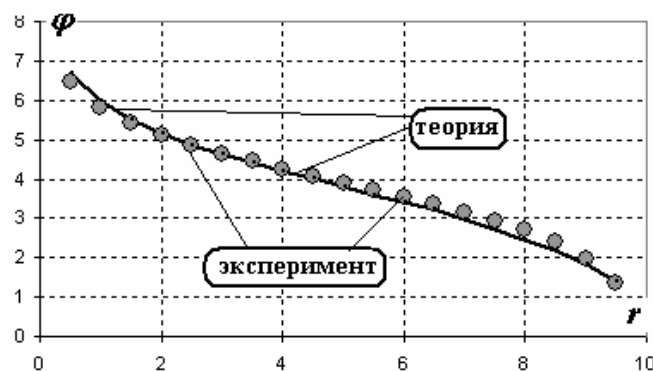
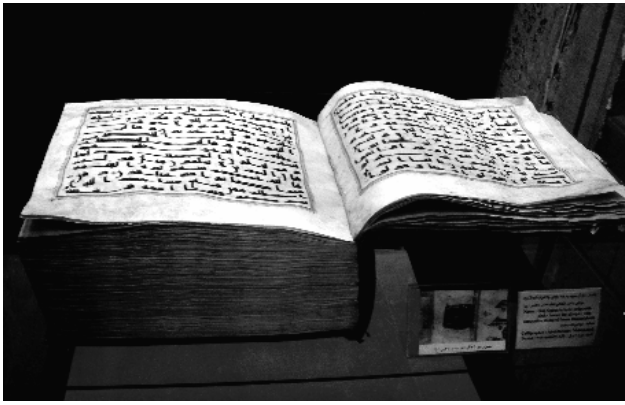


Рис. 6



Часть 4. Далеко не полный сборник...

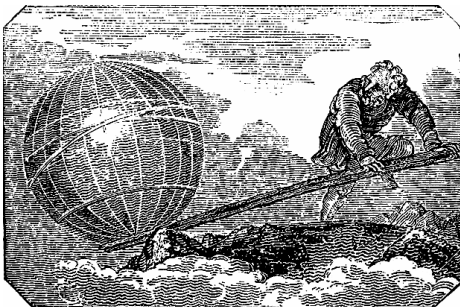
В этой части мы обращаемся к традиционному построению курса физики средней школы – задачи сгруппированы по его отдельным темам. Перечень этих тем не слишком велик, но именно они являются наиболее популярными на олимпиадах различного уровня.

Следует отметить, что отнесение

задачи к тому или иному разделу в некоторой степени условно, так как при их выполнении часто необходимо использовать различные физические законы и математические методы. Основные подходы к выполнению экспериментальных работ и методам обработки результатов были достаточно подробно рассмотрены в предыдущих разделах, поэтому здесь мы имеем полное право, ограничиться более кратким изложением решения предлагаемых задач.

Наконец, чтобы предоставить читателям возможность самостоятельно подумать (или, что предпочтительнее, проделать предлагаемые работы), условия и методы решения задач¹ разделены, причем для некоторых задач приведены только краткие указания по их решению.

Условия задач.



4.1 Дайте мне точку опоры, или правило рычага.

Изучение законов равновесия, а также их использование для проведения измерений неизвестных сил очень популярно на олимпиадах различного уровня. Выполнение подобной работы, как правило, не требует сложного оборудования, измерения могут быть проведены с высокой точностью, обработка результатов не предполагает использования сложных

математических методов, поэтому эти задачи можно предлагать для школьников, только начинающих изучать физику. К данной теме могут быть отнесены задачи 1 и 12 рассмотренные ранее.

¹ Те, кто даже бегло просмотрел предыдущие части данной книги, понимают, что экспериментальные задачи ответа не имеют.



Задача 20. «Задача Архимеда».

Оборудование: два карандаша, полоска миллиметровой бумаги, скрепки канцелярские 15 шт.

1. С помощью двух карандашей, полоски миллиметровой бумаги и канцелярских скрепок экспериментально докажите справедливость законов равновесия рычага.
2. Определите отношение масс карандаша и скрепки.

Комментарии к условию задачи.

1. Очевидно, что один карандаш следует использовать в качестве рычага, а второй – опоры. Медленно вращая карандаш опорой на столе достаточно просто определить положение равновесия карандаша-рычага. Понятно, что вместо карандашей можно использовать другие стержни. Только необходимо, чтобы масса рычага была сравнима с общей массой скрепок.
2. Полоска миллиметровой бумаги используется в качестве линейки.
3. Самым интересным пунктом задачи является первый, так как для его выполнения требуется самостоятельно разработать методику эксперимента (по известной схеме: теоретическое описание, схема установки, проведение измерений, обработка результатов).



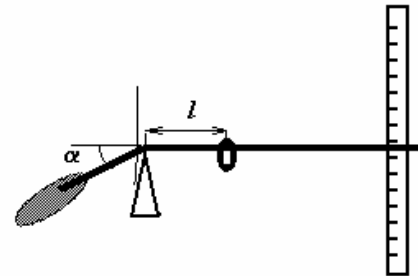
Задача 21. «Взвешивание воздуха».

Оборудование: Спица, гайка известной массы, пластилин, жестяная скоба, линейка, шарик резиновый, нитки, миллиметровая бумага, термометр, барометр комнатный.

Слегка изогнутая спица на остром твердом упоре в совокупности с вертикальной линейкой может служить в качестве чувствительных весов.

Изготовьте такие весы. Их удобно монтировать на краю крышки стола с помощью пластилина. Используйте в качестве противовеса пластилин. Добейтесь того, чтобы в свободном состоянии (без груза) плечо-стрелка располагалась горизонтально.

В качестве гири используйте небольшую гайку.



1. Покажите, что “показаний” весов (отклонения от положения равновесия без нагрузки x) пропорциональны расстоянию l от точки опоры до положения груза и его массе m_0 :

$$x = Km_0l. \quad (1)$$

2. Проверьте экспериментально полученную зависимость для двух значений угла изгиба спицы. Постройте графики полученных зависимостей.

3. Измерьте «избыточную» массу воздуха в накачанном вами воздушном шарике. Оцените давление воздуха внутри шарика.

«Избыточной» массой названа разность между массой воздуха в шарике и массой воздуха того же объема, находящегося при атмосферном давлении.

Комментарии к условию задачи.

1. При «фронтальном» выполнении данной задачи достаточно иметь один комнатный термометр и один барометр на аудиторию (они нужны только для определения атмосферного давления и комнатной температуры).
2. Спица должна иметь длину порядка 30 см, так чтобы измерительное плечо имело длину не менее 20 см. Можно использовать кусок достаточно жесткой проволоки.
3. Данная задача демонстрирует принцип работы рычажных весов, основной деталью которых является изогнутое коромысло. Прямой рычаг не может прийти в положение равновесия!
4. При «взвешивании» воздуха необходимо быть предельно аккуратным и дожидаться установления равновесия, кроме того, даже слабые воздушные потоки приводят к большим колебаниям подвешенного шарика, поэтому желательно исключить сквозняки и хождения по классу.



4.2 Изучение закона движения.

Экспериментальное изучение закона движения интересно и самоценно, как решение основной задачи механики. Эта проблема была рассмотрена нами при анализе задачи 8. Но можно взглянуть на объявленную тему гораздо шире – рассматривать изучение закона движения как метод исследования физических законов, метод изучения необычных свойств веществ. Рассматриваемые в этом разделе задачи относятся именно к этому типу, в котором закон движения является ключом к получению более глубоких физических закономерностей.

Основной проблемой при разработке таких задач является необходимость измерения времен, поэтому изучаемые процессы должны быть медленными, допускающими проведение измерений с помощью ручного секундомера. С другой стороны измерения и обработка их результатов должны выполняться за ограниченное время, отводимое на решение задачи, поэтому измерение скорости роста ногтей явно выпадает из возможного перечня экспериментальных заданий олимпиад.

Простейшей моделью движения является равномерное, поэтому мы начнем с задач, в которых движение является именно таким.

Если тело движется в вязкой среде, сила сопротивления которой зависит от скорости, то по прошествии некоторого времени движение тела становится равномерным. Изучение зависимости скорости тела от его параметров и характеристик среды позволяет делать определенные выводы об этих характеристиках. Эта идея эксплуатируется в следующей задаче, кроме того, она использовалась при формулировке задачи 14.



Задача 22. Вязкость жидкости.

Оборудование: Трубка стеклянная (длина - 60 см), исследуемая жидкость, весы с разновесом, нить, стакан с водой, пластилин, линейка, секундомер, штангенциркуль.

При движении тела в вязкой среде на него действует сила сопротивления, которая зависит от формы и размеров тела, свойств среды и скорости движения. Так сила сопротивления, действующая на шарик, движущийся в вязкой жидкости с небольшой скоростью, определяется формулой Стокса

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r - радиус шарика, v - его скорость, η - вязкость жидкости (коэффициент, который определяется свойствами жидкости). Вам необходимо исследовать движение пластилиновых шариков (сделанных самостоятельно) в киселе.

1. Покажите (теоретически), что падение шарика в вязкой среде после небольшого участка разгона становится равномерным. Найдите зависимость скорости этого установившегося движения от радиуса шарика.
2. Проверьте экспериментально, можно ли считать падение шарика в киселе равномерным.
3. Измерьте плотность вещества (пластилина), из которого изготавливаются шарики, падающие в жидкости.
4. Измерьте плотность жидкости-киселя.
5. Исследуйте зависимость скорости установившегося движения шарика в жидкости от его радиуса. Проверьте применимость формулы Стокса в данном случае.
Радиусы пластилиновых шариков должны изменяться от 1 мм до 5 мм.
5. Определите вязкость предложенной Вам жидкости.

Плотность воды принять равной $\rho_0 = 1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Комментарии к условию задачи.

1. Для увеличения вязкости (следовательно, и времени падения) рекомендуется использовать крахмальный клейстер средней консистенции.
2. Вместо трубки можно использовать длинную мензурку.
3. Для повышения достоверности следует провести достаточное количество измерений. Поэтому для выполнения работы следует использовать не менее половины бруска пластилина.

На первый взгляд закон Ома для участка цепи противоречит второму закону Ньютона. Действительно, сила электрического тока пропорциональна средней скорости движения заряженных частиц, а напряжение пропорционально силе, действующей на эти частицы. Следовательно, закон Ома, утверждающий, что сила тока пропорциональна приложенному напряжению, фактически утверждает, что скорость движения заряженных частиц пропорциональна действующей на них силе со стороны электрического поля. И. Ньютон же установил, что силе пропорционально ускорение тела. Это кажущееся противоречие снимается, если учесть, что на носители тока также действует сила сопротивления со стороны проводника. Если среднее значение этой силы пропорционально средней скорости движения заряженных частиц, то их установившаяся скорость пропорциональна действующей электрической силе, что и соответствует закону Ома. В следующей задаче экспериментально проверяется это утверждение.



Задача 23. Движение ионов.

Оборудование: промокательная бумага, кусок полиэтиленовой пленки, раствор поваренной соли, раствор фенолфталеина, два куска проволоки для электродов, источник тока (батарея 4,5 В), вольтметр, линейка, соединительные провода.

При прохождении электрического тока через растворы носителями тока являются ионы. Движение ионов можно сделать видимым. Как известно, гидроксильные ионы OH^- окрашивают раствор фенолфталеина в розовый цвет. Ионы OH^- образуются на отрицательном электроде при электролизе поваренной соли и движутся к положительному электроду. Если пропускать электрический ток через промокательную бумагу (или кусок ткани), пропитанную растворами поваренной соли и фенолфталеина, то вблизи отрицательного электрода появляется розовая полоска, которая медленно расширяется в сторону положительного электрода. Движение этой окрашенной границы соответствует границе распространения ионов OH^- .

Согласно классической теории средняя скорость движения ионов пропорциональна напряженности электрического поля

$$\langle v \rangle = bE, \quad (1)$$

коэффициент пропорциональности называется подвижностью ионов.

1. Исследуйте закон движения границы окрашенной полоски при протекании электрического тока через пропитанную промокательную бумагу. Определите, применима ли формула (1) в данном случае.
2. Определите подвижность гидроксильных ионов OH^- .

Движение границы является очень медленным, не затягивайте начало измерений!

Комментарии к условию задачи.

1. Вместо промокательной бумаги можно использовать кусок плотной ткани.
2. Концентрации растворов должны быть небольшими, порядка нескольких процентов. Можно сразу приготовить смешанный раствор.
3. На бумаге следует расположить параллельно два куска проволоки, желательно их прижать для лучшего контакта.
4. Вместо батарейки можно использовать и другие источники постоянного напряжения, например, ЛИП.

Еще одна сила торможения, пропорциональная скорости движения, возникает при движении проводников в магнитном поле. В движущем проводнике индуцируются токи Фуко, взаимодействие которых с породившим их магнитным полем приводит к появлению силы Ампера, которая тормозит движение проводника. Эти силы часто называют магнитной вязкостью и исследуются в следующей задаче.



Задача 24. «Магнитная вязкость»

Приборы и оборудование: штатив с лапкой, П-образный держатель, скоба для магнитов, алюминиевый «квадратный диск» на оси, набор кольцевых магнитов (2 пары), 2 груза известных масс, нить, мерная лента, секундомер.

На рисунке показана экспериментальная установка. Алюминиевая пластинка, прикрепленная к оси, может вращаться в держателе под действием груза, прикрепленного на нити, второй конец которой намотан на ось пластинки. В специальном держателе могут крепиться кольцевые магниты. Положение груза определяется с помощью вертикально расположенной мерной ленты. Если намотать нить на ось пластинки, и отпустить привязанный груз, то нить начнет разматываться, раскручивая диск. Груз будет опускаться, пройдя нижнюю точку, он затем начнет подниматься. Обозначим высоту, с которой начинает опускаться груз h_0 , а высоту, на которую он поднимается после прохождения нижней точки - h_1 (высоты отсчитываются относительно нижней точки опускания груза при полностью размотанной нити).



Часть 1. Движение без магнитов.

1.1 Измерьте зависимости высоты подъема груза h_1 от высоты их начального подъема h_0 для двух различных грузов.

1.2 Постройте графики полученных зависимостей. Дайте им качественное объяснение.

Часть 2. Магнитное торможение.

Расположите в держателе пару одинаковых магнитов большего диаметра.

2.1 Измерьте зависимости высоты подъема груза h_1 от высоты их начального подъема h_0 для двух различных грузов.

2.2 Постройте графики полученных зависимостей. Дайте им качественное объяснение.

Часть 3. Индукция магнитного поля магнита.

3.1 Используя полученные ранее результаты, укажите в каких случаях движение груза можно считать равномерным. Подтвердите экспериментально сделанные предположения.

3.2 Используя имеющееся оборудование, ранее полученные данные, а, при необходимости, и дополнительные измерения определите отношение средних индуктивностей магнитных полей, создаваемых постоянными магнитами $B_1 : B_2 : B_{1+2}$, где B_1, B_2 - средние индуктивности полей, создаваемых первой и второй парой одинаковых магнитов, B_{1+2} - индуктивность поля создаваемого двумя парами магнитов соединенных вместе. *Постарайтесь выбрать оптимальную методику решения этой задачи.*

Комментарии к условию задачи.

1. Для проведения исследований по данной задаче необходимо самостоятельно изготовить оборудование. Дугу держателя можно согнуть из полосового железа. Отдельно следует вырезать полоску (можно из более тонкой жести) для закрепления магнитов. В качестве оси удобно использовать толстую иглу.
2. При выполнении последней части работы следует обязательно экспериментально проверить равномерность движения. Точнее, выбрать участок, на котором движение является равномерным, так в данном случае участок разгона хорошо заметен.

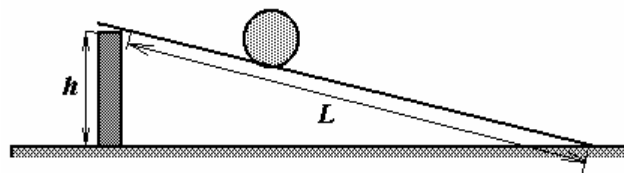
Равноускоренное движение следующая по сложности модель движения, изучаемая в средней школе, потому следующие задачи посвящены экспериментальному изучению такого движения.



Задача 25. «Задача Г. Галилея – скатывание по наклонной плоскости»

Оборудование: желоб для лабораторных работ, шарик пластмассовый, линейка с миллиметровыми делениями, секундомер, пластилин, миллиметровая бумага.

Целью данной работы является изучения качения небольшого шарика по наклонному желобу. В качестве подставки переменной высоты рекомендуем использовать кусок пластилина.



1. Исследуйте, является ли движение шарика по желобу равноускоренным.
2. Исследуйте зависимость ускорения шарика от высоты желоба h . Объясните полученную зависимость.
3. При скатывании шарика с вершины желоба, его потенциальная энергия ($W = mgh$) превращается в кинетическую энергию поступательного движения шарика ($W = \frac{mv^2}{2}$) и кинетическую энергию вращательного движения шарика. Определите экспериментально, какая доля энергии шарика превращается в энергию вращательного движения при различных высотах наклонной плоскости.

Комментарии к условию задачи.

1. В качестве желоба можно использовать деревянную доску с небольшой прорезью, обеспечивающей прямолинейность движения шарика. Хорошим желобом может служить металлический или пластиковый уголок, поставленный на ребро. В этом случае время движения увеличивается (правда, возрастает и влияние силы трения).
2. Шарик можно взять из набора для моделей кристаллов.
3. Отметим, что разделение кинетической энергии на энергию поступательного и вращательного движения является условным, зависящим от выбора метода описания плоскопараллельного движения, но используется достаточно часто.

Следующая задача похожа на предыдущую, но задания к ней отличаются.



Задача 26. «Трубка на наклонной плоскости»

Оборудование: Трибометр (деревянная доска), металлическая трубка длиной 4 см, секундомер, линейка, пластилин.

Исследуйте скатывание тонкостенной трубки по наклонной плоскости.

1. Исследуйте экспериментально, можно ли считать движение трубки равноускоренным.
2. Исследуйте зависимость времени скатывания от высоты наклонной плоскости. Постройте график полученной зависимости.
3. Используя полученные данные, определите ускорение свободного падения и оцените коэффициент трения трубки о доску.

Примечание. В данном случае речь идет о трении качения. Сила трения качения определяется по формуле:

$$F_{тр.} = \frac{K}{R} N, \quad (1)$$

где N - сила нормальной реакции, R - радиус катящегося тела, K - коэффициент трения качения, который имеет размерность длины.

Комментарии к условию задачи.

1. В данной задаче нет необходимости «выковыривать» канавку в доске – цилиндр скатывается прямолинейно. Длина доски должна быть порядка 1 метра.
2. В принципе, можно исследовать и скатывание сплошного цилиндра, однако тонкостенная трубка движется с меньшим ускорением, поэтому относительная точность измерения времени выше.
3. Трубку можно выпилить из старой алюминиевой лыжной палки.

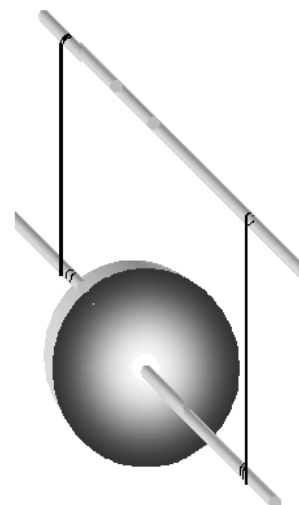
Главное достоинство следующей задачи – относительная простота проведения измерений и более высокая точность и надежность экспериментальных результатов. Это обусловлено большим временем раскручивания диска, так стандартная полиэтиленовая крышка на деревянной шашлычной палочке в качестве оси вращения опускается на полметра за несколько десятков секунд! Поэтому настоятельно рекомендуем выполнить эту задачу.



Задача 27. «Маятник Максвелла»

Оборудование: штатив с лапкой, секундомер, две палочки, нитки, скотч, шило, ножницы, линейка, картон, полиэтиленовая крышка, миллиметровая бумага.

Маятник Максвелла представляет собой диск, насаженный на тонкий стержень. На стержень с двух сторон наматываются нити, верхние концы которых закрепляются (удобно это сделать на другом стержне, который закрепляется в лапке штатива). Если маятник отпустить, то диск начинает раскручиваться, а его ось медленно опускается. Достигнув нижней точки, маятник начинает подниматься вверх, после чего процесс его колебаний повторяется. В качестве диска используйте полиэтиленовую крышку (задания 1, 2), а в качестве стержней палочки для шашлыков.



Диск можно также заменить на картонный квадрат, ось маятника в этом случае должна проходить через центр квадрата (задания 3, 4). Хорошо закрепляйте картон на оси с помощью скотча, старайтесь, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси.

Для более устойчивого движения, старайтесь отцентрировать маятник, нити должны быть вертикальны, на стержнях их можно закрепить с помощью кусочка скотча.

В данном эксперименте вам необходимо исследовать движения таких маятников.

Задание 1.

Изготовьте маятник с использованием полиэтиленовой крышки в качестве диска.

1.1 Постройте график закона движения оси маятника, при его смещении на максимально возможную высоту.

1.2 Исследуйте, можно ли считать движение оси маятника равноускоренным на всем пути его движения.

1.3 Определите начальное и среднее за все время движения ускорение оси маятника.

Задание 2.

2.1 Исследуйте зависимость высоты подъема маятника h_k от числа колебаний k . Назовем коэффициентом восстановления отношение высот подъема в ходе двух последовательных колебаний $\eta = \frac{h_k}{h_{k-1}}$.

2.2 Проверьте, можно ли считать коэффициент восстановления величиной постоянной для данного маятника.

2.3 Определите среднее значение этого коэффициента.