

Однако следующие обстоятельства вызывают сомнения в строгой линейности:

- в цепи присутствует светодиод, элемент явно нелинейный; правда он в данном случае работает в режиме слабых токов, значения сил которых далеки от номинального значения (об этом свидетельствует его слабое свечение), поэтому возможно, что в данном режиме его сопротивление примерно постоянно;
- свободные члены линейных зависимостей b , рассчитанные по МНК, значимо отличны от нуля ($\Delta b > |b|$), причиной чего может быть нелинейность зависимостей;
- точки на графике, вроде закономерно отклоняются от построенной прямой¹⁷.

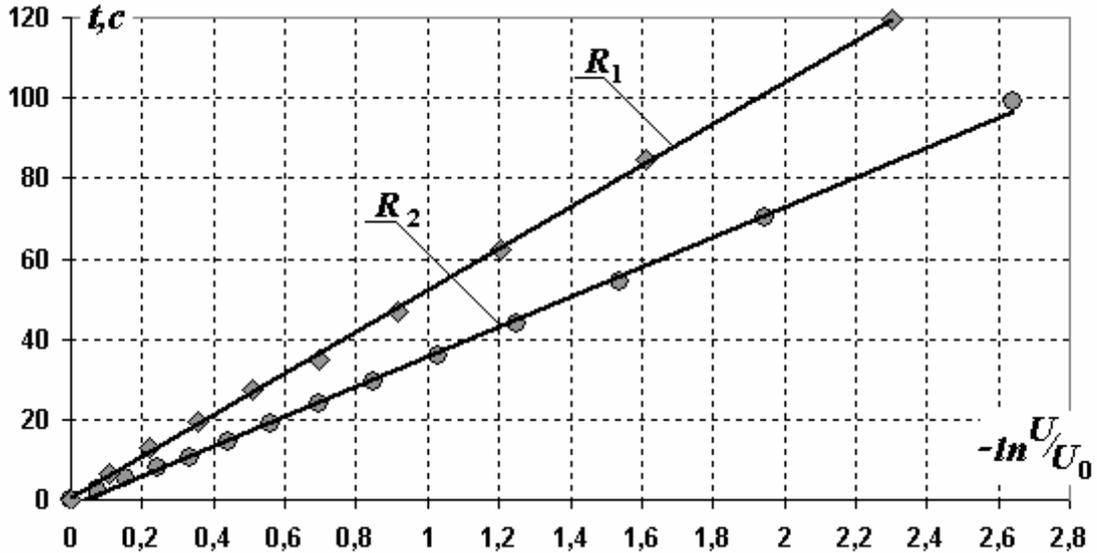


График 3. Зарядка через светодиод

Эти наблюдения мы обоснуем далее, а пока обработаем эти зависимости как линейные.

Коэффициенты наклона и в данном случае являются оценками произведения емкости конденсатора на полное сопротивление цепи:

$$a = (R + R_v)C,$$

поэтому дополнительное сопротивление, включенное в цепь, следует рассчитывать по формуле:

$$R = \frac{a - R_v C}{C} = \frac{a - \tau_0}{C}. \quad (11)$$

Очевидно, что для расчетов следует использовать значение величины τ_0 , найденное с максимальной точностью. Формула для расчета погрешности дополнительного сопротивления имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \tau_0} \Delta \tau_0\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial C} \Delta C\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{C} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{1}{C} \Delta \tau_0\right)^2 + \left(\frac{a - \tau_0}{C^2} \Delta C\right)^2} = \quad . \quad (12) \\ &= R \sqrt{\frac{(\Delta a)^2 + (\Delta \tau_0)^2}{(a - \tau_0)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} \end{aligned}$$

¹⁷ Смотри дополнение к данной задаче.

Из этой формулы следует, что относительная погрешность возрастает, если время зарядки a приближается к величине τ_0 - как обычно, когда в расчетных формулах присутствуют разности близких величин.

Используя эти формулы найдем значения дополнительных сопротивлений для двух серий измерений, представленных в Таблице 2.

Общее сопротивление¹⁸ в первом случае (включен резистор и диод) равно

$$R^{(1)} = \frac{a_1 - \tau_0}{C} = \frac{51,58 - 27,3}{4,41 \cdot 10^{-3}} \approx 5,51 \text{ кОм},$$

а его погрешность

$$\Delta R^{(1)} = R^{(1)} \sqrt{\frac{(\Delta a_1)^2 + (\Delta \tau_0)^2}{(a_1 - \tau_0)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 5,51 \sqrt{\frac{(0,75)^2 + (0,5)^2}{(51,58 - 27,3)^2} + (0,03)^2} \approx 0,26 \text{ кОм},$$

с невысокой относительной погрешностью $\varepsilon \approx 5\%$. Это сопротивление есть сумма известного сопротивления резистора $R_1 = 3,0 \text{ кОм}$ и среднего сопротивления светодиода, которое мы обозначим R_x . Поэтому, найденное по этим данным сопротивление диода равно: $R_x = R^{(1)} - R_1 \approx 2,51 \text{ кОм}$. Так погрешностью сопротивление резистора пренебрегаем, то абсолютная погрешность значения сопротивления диода равна найденной погрешности полного сопротивления цепи. Таким образом, сопротивление диода равно¹⁹

$$R_x^{(1)} = (2,51 \pm 0,26) \text{ кОм}. \quad (13)$$

Заметьте, что опять вычитание существенно увеличило относительную ошибку, которая составляет здесь $\varepsilon \approx 10\%$.

Аналогично, рассчитаем сопротивление цепи во второй серии измерений (это есть сопротивление диода):

$$R^{(2)} = \frac{a_2 - \tau_0}{C} = \frac{37,15 - 27,3}{4,41 \cdot 10^{-3}} \approx 2,23 \text{ кОм},$$

и его погрешность:

$$\Delta R^{(2)} = R^{(2)} \sqrt{\frac{(\Delta a_2)^2 + (\Delta \tau_0)^2}{(a_2 - \tau_0)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 2,23 \sqrt{\frac{(0,88)^2 + (0,5)^2}{(37,15 - 27,3)^2} + (0,03)^2} \approx 0,24 \text{ кОм},$$

что составляет $\varepsilon \approx 10\%$. Таким образом, по этим данным сопротивление диода равно

$$R_x^{(2)} = (2,23 \pm 0,24) \text{ кОм}. \quad (14)$$

Полученные интервалы для значений этого сопротивления (13)-(14) перекрываются, поэтому можно считать, что полученные зависимости **согласуются**²⁰ друг с другом. Для расчета окончательного значения сопротивления диода следует усреднить полученные значения. Так как эти результаты имеет примерно равные погрешности²¹, то в качестве окончательного результата следует взять среднее арифметическое между ними:

$$R_x = \frac{R_x^{(1)} + R_x^{(2)}}{2} \approx 2,37 \text{ кОм}.$$

Так как этот результат является средним по двум значениям, то его погрешность в $\sqrt{2}$ раз меньше погрешности отдельного результата

$$\Delta R_x \approx \frac{\Delta R_x^{(1)}}{\sqrt{2}} \approx 0,2 \text{ кОм}.$$

¹⁸ В данной задаче много различных сопротивлений, поэтому приходится использовать различные обозначения. В данном разделе верхний индекс в $R^{(1)}$ означает номер измерения, а не показатель степени!

¹⁹ Это еще не окончательный результат, поэтому оставляем одну запасную цифру.

²⁰ Для обсуждения этой проблемы (а также проблемы усреднения нескольких результатов) в условии было предложено провести две серии измерений в этой части.

²¹ Если это не так, то смотри дополнение к данной задаче.

Итак, используя все полученные данные, получено следующее значение среднего сопротивления светодиода

$$R_x = (2,4 \pm 0,2) \text{ кОм}, \quad \varepsilon = 8\% . \quad (15)$$

Обратимся еще раз к вопросу о согласовании данных. Можно ответить на него и иным способом. Найдем разность полученных значений сопротивлений $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ (которая должна быть равна известному сопротивлению резистора):

$$R^{(1)} - R^{(2)} = 5,51 - 2,23 \approx 3,28 \text{ кОм}$$

и ее погрешность

$$\Delta(R^{(1)} - R^{(2)}) = \sqrt{(\Delta R^{(1)})^2 + (\Delta R^{(2)})^2} \approx 0,35 \text{ кОм}. \quad (16)$$

Видим, что в пределах погрешности получено известное значение $R_1 = 3,0 \text{ кОм}$, что подтверждает вывод о согласованности.

Интересно, что можно рассчитать разность этих сопротивлений с большей точностью. Для этого ее необходимо вычислить непосредственно из полученных экспериментальных данных. Из формулы (11) следует, что оценка этой разности может быть получена по формуле:

$$\delta R = \frac{a_1 - a_2}{C} = \frac{51,58 - 37,15}{4,41 \cdot 10^{-3}} \approx 3,27 \text{ кОм}, \quad (17)$$

что практически совпадает с полученным ранее значением (различие связано с ошибками округления). Однако расчет погрешности этой формулы приводит к результату

$$\Delta(\delta R) = \delta R \sqrt{\frac{(\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2}{(a_1 - a_2)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 3,27 \sqrt{\frac{(0,75)^2 + (0,88)^2}{(51,58 - 37,15)^2} + (0,03)^2} \approx 0,28 \text{ кОм}.$$

Относительная погрешность этого результата равна $\varepsilon \approx 8\%$, в то время как погрешность результата (16) равна $\varepsilon \approx 11\%$. Полученный выигрыш связан с тем, что формуле (17) нет величины τ_0 , поэтому ее неточность не влияет на конечный результат: чем меньше неточных величин входит в расчетную формулу, тем она точнее.

Приступим к анализу возможного изменения сопротивления. Как уже было отмечено, при наличии зависимости сопротивления светодиода от силы тока, протекающего через него, построенная в полулогарифмическом масштабе зависимость должна быть нелинейной. Поэтому вопрос об изменении сопротивления связан с проблемой выявления нелинейности полученных зависимостей. Когда диод был включен в цепь без дополнительного резистора, сила тока через него изменялась в больших пределах, поэтому следует анализировать вторую серию измерений.

Конечно, невысокая точность экспериментальных данных не позволяет найти с хорошей точностью, поэтому речь идет только об оценке возможного диапазона изменения сопротивления.

Одним из возможных способов получения такой оценки является разбиение всего диапазона измерений на несколько частей и обработка каждой части отдельно. Брать слишком малые интервалы неразумно: это приводит к большим погрешностям и ненадежности получаемых результатов²².

В данном случае можно построить линейные зависимости для нескольких начальных и нескольких конечных точек, а затем по этим зависимостям найти значения средние значения сопротивлений диода. Выбор числа этих точек требует некоторого компромисса: мало точек - высока погрешность; много точек - мало ожидаемое различие в средних значений. Поэтому в данном случае линейные зависимости построены по пяти начальным и пяти конечным точкам. Отметим, что даже если аккуратно провести две таких прямых «на глаз», то видно различие в их наклонах (График 4).

²² Тем не менее в дополнении приведены такие расчеты.

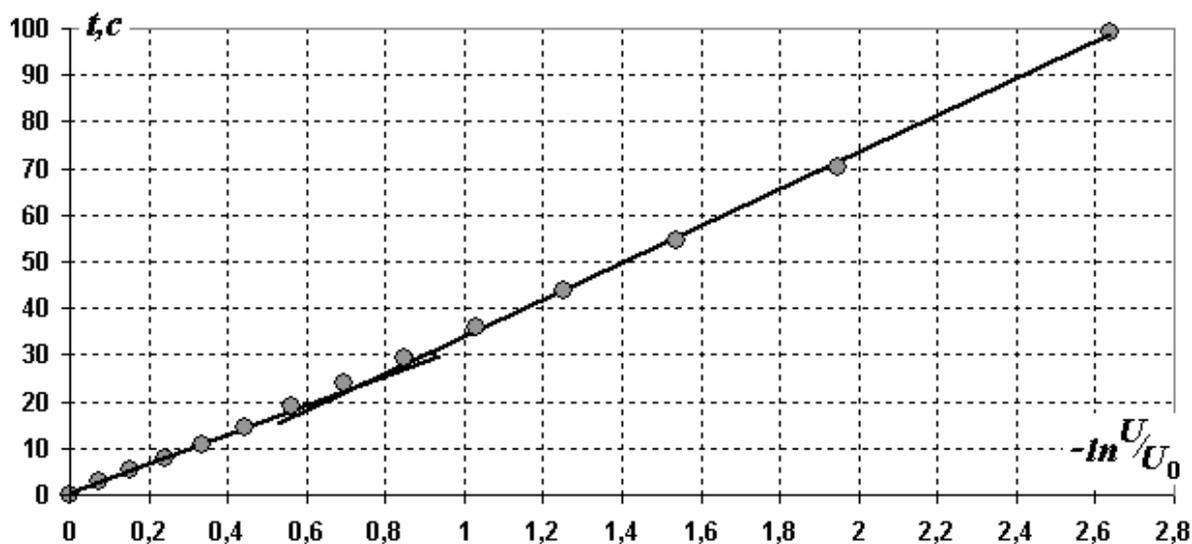


График 4. Зарядка через светодиод (обработка)

Обработка по МНК этих зависимостей дала следующие значения коэффициентов наклона (и их погрешностей):

Для интервала напряжений на вольтметре $U \in (0,2 \div 0,8)В$ (среднее 0,6 В):

$$a_{0,6} = (39,5 \pm 1,4)c ;$$

Для интервала $U \in (2,0 \div 2,8)В$ (среднее 2,4 В):

$$a_{2,4} = (31,5 \pm 1,9)c .$$

Как видно интервалы этих значений не перекрываются, поэтому различия в коэффициентах (следовательно, и в сопротивлениях) значимы. Кроме того, получен качественно верный результат: с ростом напряжения на диоде его сопротивление падает. Как и ранее разность сопротивлений лучше рассчитывать непосредственно из полученных данных (без расчета каждого сопротивления по отдельности):

$$R_{0,6} - R_{2,4} = \frac{a_{0,6} - a_{2,4}}{C} \approx 1,8кОм ,$$

погрешность²³ этой разности

$$\Delta(R_{0,6} - R_{2,4}) = (R_{0,6} - R_{2,4}) \sqrt{\frac{(\Delta a_{0,6})^2 + (\Delta a_{2,4})^2}{(a_{0,6} - a_{2,4})^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} \approx 0,5кОм .$$

Таким образом, окончательная оценка диапазона изменения сопротивления следующая

$$R_{0,6} - R_{2,4} = (1,8 \pm 0,5)кОм .$$

Мы получили достаточно заметное изменение сопротивления диода, но это изменение на «линеаризованной» зависимости не слишком заметно, потому что оно накладывается на значительное сопротивление вольтметра, которую вносит основной вклад в общее сопротивление цепи: очередной раз сталкиваемся с проблемой малых разностей!

2.3 Наблюдение показывает, что светодиод светится достаточно долго, когда показания вольтметра равны нулю, поэтому непосредственно измерить силу тока с помощью вольтметра невозможно. Кроме того, не наблюдается порогового эффекта, при котором свечение диода резко прекращается – свечение затухает очень постепенно. Конкретный смысл выражения «прекращает светиться» зависит от чувствительности глаза

²³ Обычно, когда по условию требуется «оценить» некоторую величину, то и ее погрешность оценивается самым примитивным методом, либо вообще не оценивается.

наблюдателя и условий внешнего освещения. Все это приводит к тому, что разброс значений силы тока может быть очень значительным. Но уж очень привлекательна идея этого измерения: использовать секундомер. Вид зависимости силы тока от времени известен:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{a}\right) = \frac{U_0}{R_V} \exp\left(-\frac{t}{a}\right),$$

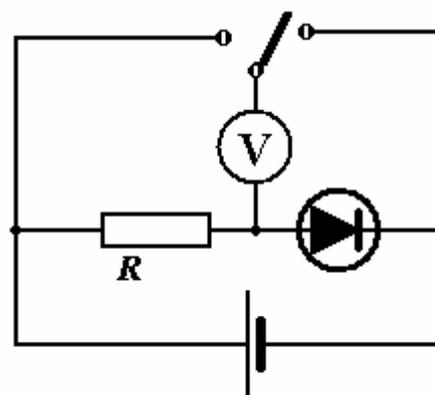
(здесь использовано очевидное соотношение между силой тока в цепи и измеряемым напряжением на вольтметре – закон Ома), параметры этой зависимости найдены. Поэтому следует измерить время свечения (по нашим данным это примерно 5 минут) и подставить его формулу, описывающую зависимость силы тока от времени:

$$I = \frac{U_0}{R_V} \exp\left(-\frac{T}{a}\right) \approx \frac{2,8B}{6,6k\Omega} \exp\left(-\frac{300}{40}\right) \approx 0,2\text{мкА}.$$

Погрешность этого результата не будем, что бы не пугать тысячами процентов, сошлемся на то, что в условии требуется только грубо оценить.

Часть 3.

Может быть неожиданно для учащихся эта часть работы наиболее проста и не требует экспериментальных хитростей. Достаточно диод подключить к источнику тока последовательно с небольшим резистором и вольтметром (ни конденсатор, ни секундомер здесь не нужен), и измерить напряжения на резисторе и на диоде. Отношение этих напряжений равно отношению сопротивлений (одно из которых известно). При таком подключении сопротивления диода и резистора заметно меньше сопротивления вольтметра, поэтому учитывать его не надо. Что бы подтвердить это утверждение необходимо экспериментально убедиться в том, что измеряемое суммарное напряжение на диоде и резисторе равно сумме напряжений на каждом элементе.



Заметим, что, имея два различных резистора, из них можно составить четыре различных составных: каждый по отдельности, соединенные последовательно и параллельно.

Эта работа столь проста, что обсуждать ее далее нет смысла.

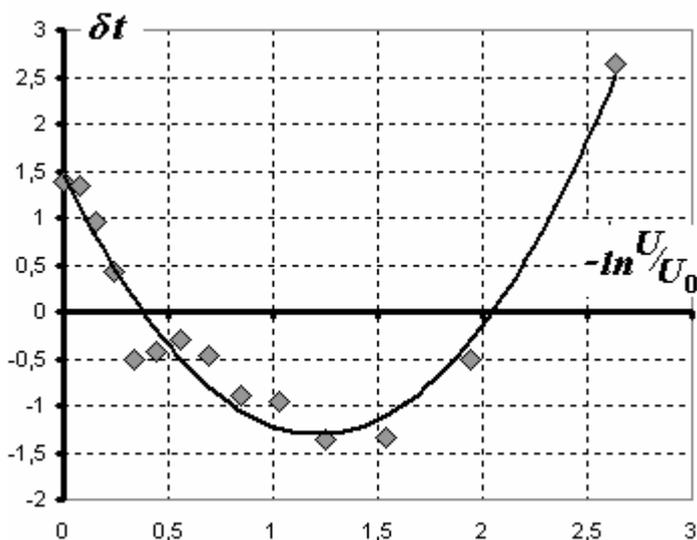
Полезные Дополнения.

1. Чтобы показать, что отклонения от линейной (а впрочем, и любой другой) зависимости являются систематическими (закономерными) можно рассчитать эти отклонения и даже построить их график.

Так в данной задаче мы утверждали, что при зарядке конденсатора через светодиод, полученные значения отклоняются от линейной зависимости (График 3), построенной по МНК. Рассчитаем разности между экспериментальными значениями времен t_k и рассчитанными с помощью полученной линейной функцией $\bar{t}_k = ax_k + b$:

$$\delta t_k = t_k - \bar{t}_k = t_k - (ax_k + b)$$

и построим график зависимости этой величины от того же аргумента. Построенный график неопровержимо убеждает, что отклонения подчиняются некоторой функциональной закономерности.



Еще один способ доказать, что полученная зависимость не является линейной: построить другую зависимость и доказать, что она лучше.

2. В данной работе мы встретились с необходимостью усреднения значений, полученных разными методами. Нам повезло, что эти данные оказались примерно равноточными. В том случае, когда все значения имеют равные погрешности, в качестве итогового результата следует брать среднее арифметическое этих значений, погрешность этого результата в \sqrt{N} раз меньше погрешности отдельного результата²⁴. На языке формульной записи:

Если имеются равноточные данные:	$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \pm \Delta x \\ x_2 \pm \Delta x \\ \dots \\ x_N \pm \Delta x \end{array} \right. , \text{ (или } x_k \pm \Delta x, k = 1, 2, \dots, N \text{),}$
то результат усреднения имеет вид	$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N}; \quad \Delta \langle x \rangle = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$

Если погрешности отдельных результатов различны, то для усреднения следует применять более сложную процедуру. Действительно, более точным результатом доверять следует больше, они должны вносить в окончательный результат больший вес.

Можно (но сложно) доказать, что для получения окончательного результата следует брать среднее взвешенное, причем в качестве весов следует брать величины обратные квадрату погрешностей. Погрешность окончательного результата

²⁴ Как и ранее мы не приводим выводов многочисленных формул теории погрешностей. Их строгий вывод требует применения теории вероятностей и математической статистики. Поэтому ограничиваемся некоторыми соображениями, основанными на здравом смысле.

рассчитывается по правилу: величина обратная квадрату суммарной погрешности равна сумме величин, обратных погрешностям отдельных результатов.

На языке формул это правило записывается в виде:

Если имеются данные с разными погрешностями: $x_k \pm \Delta x_k, \quad k = 1, 2 \dots N,$

то результат усреднения имеет вид $\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{x_k}{(\Delta x_k)^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{(\Delta x_k)^2}}; \quad \left(\frac{1}{\Delta \langle x \rangle} \right)^2 = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\Delta x_k} \right)^2$

Отметим, что в любом случае такое усреднение приводит к уменьшению погрешности. Приведем примеры такого усреднения и покажем, что, результаты полученные по этим двум правилам могут заметно отличаться.

Пусть $\begin{cases} x_1 = 10 \pm 2 \\ x_2 = 11 \pm 3 \end{cases}$, то результат усреднения $\langle x \rangle = 10,3 \pm 1,7$, что отличается от среднего

арифметического 10,5 и ближе к более точному значению.

Еще более заметны отличия, если погрешности отличаются сильнее.

Так для $\begin{cases} x_1 = 10 \pm 1 \\ x_2 = 11 \pm 3 \end{cases}$ результат взвешенного усреднения $\langle x \rangle = 10,10 \pm 0,95$.

Если же погрешности отличаются мало, то результат взвешенного усреднения мало отличается от арифметического. Так для чисел, полученных в данной работе

$R_x^{(1)} = (2,51 \pm 0,26) \text{кОм}, \quad R_x^{(2)} = (2,23 \pm 0,24) \text{кОм},$ «правильное» усреднение²⁵ дает $R_x = (2,359 \pm 0,176) \text{кОм},$ а не $R_x = (2,370 \pm 0,183) \text{кОм},$ как при арифметическом усреднении.

3. По полученной зависимости напряжения на вольтметре от времени можно «теоретически» построить зависимость сопротивления от силы тока, или даже вольтамперную характеристику.

Для этого будем рассматривать интервал между двумя соседними измерениями (скажем, между двумя значениями напряжений U_k, U_{k+1} и соответствующим им значениям времен). Среднее значение тока в этом интервале равно

$$I_{k+0,5} = \frac{U_k + U_{k+1}}{2R_v}.$$

Применяя к этому интервалу традиционную линеаризацию $t = -RC \ln \frac{U}{U_0}$, находим

среднее значение сопротивления на этом интервале (здесь Δ - означает разности между крайними значениями):

$$R_{k+0,5} = -\frac{1}{C} \frac{\Delta t}{\Delta \left(\ln \frac{U}{U_0} \right)}.$$

Далее можно вычислить напряжение на диоде:

$$U_{k+0,5}^{(диод)} = I_{k+0,5} \cdot R_{k+0,5},$$

²⁵ Лишние цифры – для того, чтобы увидеть различие.

и построить нужные графики. Ниже показаны построенные таким образом зависимости. Но вспомните, неоднократно обсужденную проблему малых разностей и усомнитесь в обоснованности подобных расчетов, хотя тенденции они отражают верно.

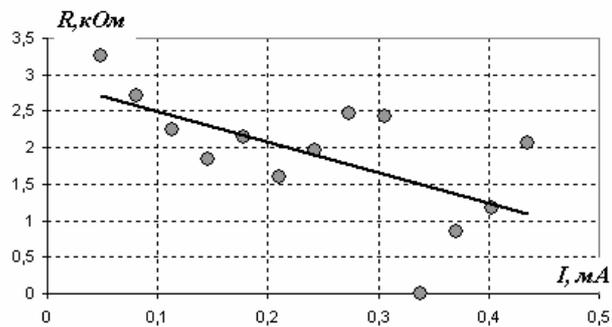


График 5. Зависимость сопротивления светодиода от силы тока

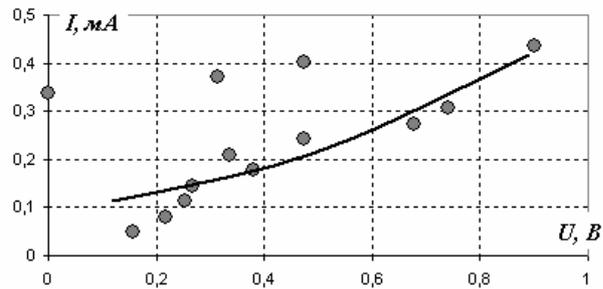


График 6. Вольт-амперная характеристика диода

Тем не менее, подобные процедуры используются при обработке экспериментальных данных (в том числе и в данной книге).

3.6 Когда нужна градуировка.

Рассмотренные примеры должны были убедить в том, что в экспериментальных исследованиях предпочтительнее проводить прямые измерения: напряжение измерять вольтметром, скорость – спидометром, расстояние – линейкой. К сожалению, далеко не всегда это удается, поэтому приходится измерять некие физические величины, а затем проводить перерасчеты (то есть проводить косвенные измерения), которые лишь ухудшают точность результатов. Хорошо если можно записать явные формулы, позволяющие переходить от результатов прямых измерений к интересующим физическим величинам²⁶. А что делать в том случае, если такие формулы вам (и авторам задач) не известны?

Представим себе гипотетическую ситуацию: вы едете в автомобиле с неработающим спидометром. Зато у вас случайно оказался под руками частотомер, позволяющий измерять частоту звука (а может у вас музыкальный слух, позволяющий точно определять звучащую ноту, а как физик вы знаете частоты всех нот). Конечно же, частота основного тона гула автомобиля зависит от скорости его движения. Но знаете ли вы эту зависимость? Скорее всего, что нет! Но ехать надо! В такой ситуации можно экспериментально найти требуемую зависимость – причем не обязательно ее искать в аналитическом формульном виде. Можно построить экспериментальный график этой зависимости, который называется **градуировочным**.

Для построения этого графика обе физические величины должны быть известны, то есть измерены. После того, как получен градуировочный график, можно измерить одну из величин, а вторую определить по графику. Так в рассматриваемом примере с автомобилем вам было необходимо заранее построить градуировочный график, устанавливающий связь между скоростью автомобиля (которую надо было измерять, пока спидометр работал) и частотой издаваемого звука. Построив такой жизненно необходимый график, нужно случайно захватить его с собой. Правда, если в следующий раз вы захотите определить температуру воды в чайнике при его нагревании с помощью своего частотомера, вам необходимо заранее, случайно, построить градуировочный график, устанавливающий связь между температурой воды и частотой шипения чайника. Не забудьте, что эти зависимости различны для разных чайников, также зависят от количества налитой воды.

Покажем, как эта идея заблаговременного построения градуировочного графика используется в заданиях экспериментальных туров.

²⁶ Как правило, все равно, необходимо проверять применимость этих формул в конкретных условиях: а вдруг сопротивление воздуха опять пакостит!



Задача 11. «Каверна»

Физические методы исследования позволяют заглянуть «внутрь» непрозрачных тел. В данной работе Вам предстоит исследовать форму полости внутри непрозрачного тела.

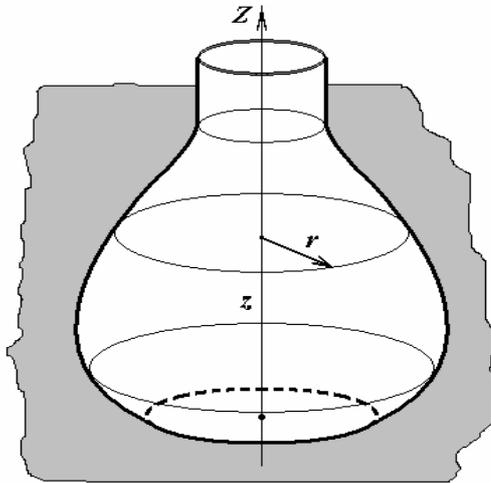


Рис. 1

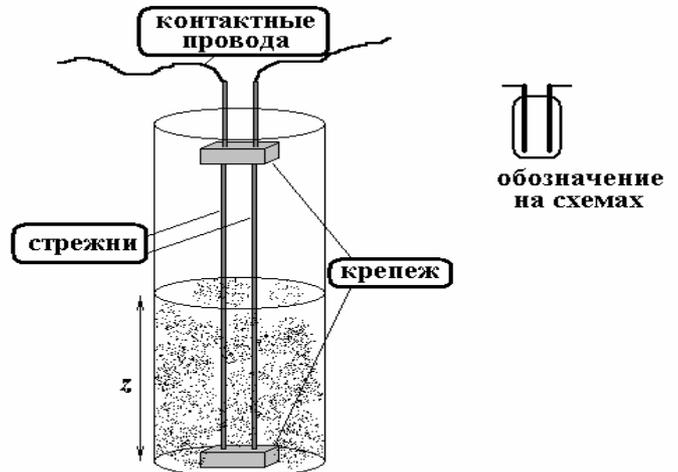


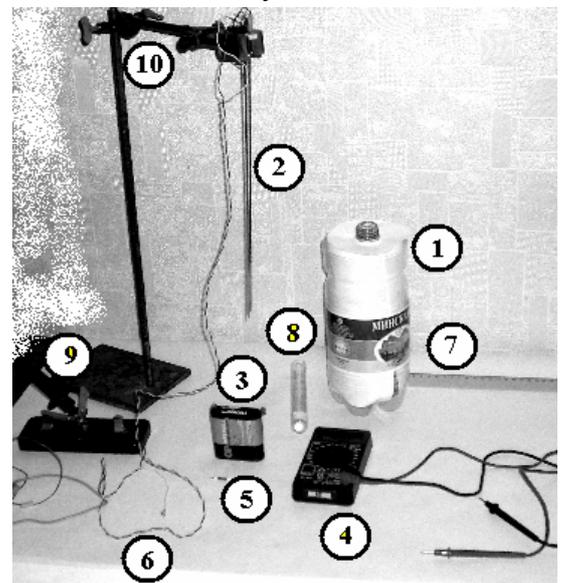
Рис. 2

Известно, что полость имеет осесимметричную форму (*по секрету – внутри запакована бутылка нестандартной формы*) – Рис.1. Форму такой полости можно задать (а затем нарисовать) с помощью функции $r(z)$ - зависимости радиуса сечения r от высоты над дном z .

Для выполнения поставленной задачи вам предлагается использовать электрический датчик, состоящий из двух металлических спиц, закрепленных параллельно друг другу, к которым подсоединены контактные провода (Рис.2). Если такой датчик поместить в проводящую жидкость, то электрическое сопротивление между спицами будет зависеть от глубины погруженной части спиц (если концы спиц находятся на дне, то - глубине слоя жидкости). Таким образом, по измерению сопротивления (или иной электрической характеристики протекающего тока) между спицами можно определить глубину слоя жидкости.

Пропускайте электрический ток через электролит только во время проведения измерений – электрические свойства электролита (например, его цвет) изменяются при протекании тока.

Приборы и оборудование: Тело с полостью (1); датчик (2); батарейка 4,5 В (3); мультиметр (4); резистор (5); соединительные провода (6); линейка (7); мензурка (8); ключ электрический (9), штатив (10) прозрачная бутылка, вода.



Часть 1. Градуировка.

При проведении измерений в данной части используйте прозрачную бутылку.

1.1 Покажите²⁷ (теоретически), что электрическое сопротивление раствора между спицами датчика обратно пропорционально глубине погружения спиц в раствор

$$R = \frac{A}{z}, \quad (1)$$

где A - некоторая постоянная, зависящая от диаметра спиц, расстояния между ними и удельного сопротивления раствора²⁸.

При протекании электрического тока через раствор, его химический состав изменяется, следовательно, изменяется и его сопротивление. Поэтому при проведении измерений следует стремиться к тому, чтобы сила тока через электролит была мала. С другой стороны, изменение глубины погружения должно заметно сказываться на измеряемой физической величине. Эти рассуждения приводят к выводу, что наиболее рационально измерять напряжение между спицами при небольшой силе тока в цепи, причем, желательно, чтобы эта сила тока практически не зависела от сопротивления раствора. В этом случае напряжение между спицами датчика зависит от глубины погружения по закону

$$U = \frac{B}{z}, \quad (2)$$

где B - некоторая постоянная, зависящая от параметров электрической цепи и постоянной A в формуле (1).

1.2. Предложите электрическую схему, позволяющую реализовать высказанную идею определения глубины погружения по измерению напряжения между спицами датчика. Нарисуйте эту схему.

Не забудьте поставить ключ, чтобы подключать источник только во время проведения измерений.

1.3. Докажите (теоретически) формулу (2) для вашей цепи, выразите постоянную B через параметры цепи и постоянную A .

1.4 Проверьте экспериментально применимость формулы (2) в вашем случае.

Часть 2. Полость.

Поместите датчик внутрь полости в непрозрачном теле.

2.1 Измерьте зависимость напряжения между спицами от объема раствора, налитого внутрь полости. Постройте график полученной зависимости.

2.2 По полученным данным постройте профиль полости, то есть зависимость ее горизонтального радиуса от расстояния до дна $r(z)$.

²⁷ Если вы не знаете как доказать эту формулу, то пользуйтесь ей без доказательства.

²⁸ Значение этого коэффициента выводить не надо (это слишком сложно) – лучше определить его (при необходимости) экспериментально.

Комментарии к условию задачи.

1. Задачи подобного типа часто называют «черными ящиками»: в них требуется определить нечто, невидимое, скрытое от ученика. Известно много задач такого типа: в «черном ящике» электрическая цепь – необходимо ее нарисовать; в ящике – оптические элементы; и т.д. В данном случае в «ящике» – полость.
2. Изготовить тело с полостью для этой задачи не сложно: бутылку нестандартной формы (мы использовали пузатую коньячную) можно поместить в двухлитровую пластиковую бутылку и засыпать песком и каким то образом его закрепить (например, тонким слоем цементного раствора). Естественно, горлышко бутылки должно торчать наружу.
3. Датчик можно изготовить из двух кусков жесткой проволоки (мы использовали вязальные спицы), их можно закрепить с помощью двух кусочков ластика. Соединительные провода лучше заранее прикрепить к спицам, а еще лучше собрать весь датчик заранее. Не забывайте - датчик должен входить в горлышко бутылки.
4. Прозрачная бутылка может быть любой, важно, чтобы ее высота была больше высоты исследуемой полости, и чтобы была возможность достаточно точно измерять высоту уровня жидкости в бутылке.
5. В качестве жидкости можно использовать обыкновенную слегка подсоленную воду (можно водопроводную). Повторное использование этой жидкости не рекомендуется – после протекания тока, ее химический состав изменяется. Поэтому ученикам следует предоставить количество, достаточное для заполнения обеих бутылок: сначала прозрачной, для построения градуировочного графика, а затем «полости» для определения ее формы.
6. В предлагаемом варианте задачи для измерения напряжения необходимо использовать цифровой мультиметр – обычный школьный вольтметр не обеспечивает нужную точность. 7. Важную роль играет выбор сопротивления предлагаемого резистора. Его величина должна быть на порядок (раз в десять) больше, сопротивление датчика, на 1 см погруженный в используемую жидкость. Величина этого сопротивления составляет несколько десятков Ом.

Решение и обсуждение.

Основная идея восстановления формы скрытой полости уже изложена в параграфе 2.2 данной книги. Если в осесимметричный сосуд заливать известный небольшой объем жидкости ΔV , то повышение уровня жидкости Δz может быть найдено из очевидного геометрического выражения

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta z. \quad (1)$$

Если измерить зависимость высоты уровня жидкости в сосуде от ее объема, то с помощью формулы (1) можно восстановить форму сосуда, то есть зависимость его радиуса от высоты $r(z)$. Эта идея реализуется во второй части данной задачи. Основная же проблема решения задачи заключается в определении высоты уровня жидкости по результатам измерения напряжения между спицами датчика. Идея этого расчета проста, красива и изложена в условии задачи, но требует экспериментальной проверки.

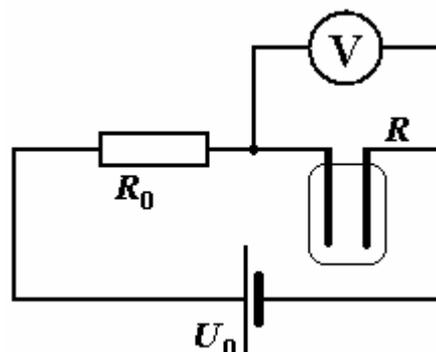
Сейчас последовательно рассмотрим решение всех пунктов данной задачи.

1.1 Так как электрический ток протекает между спицами, то площадь эффективного поперечного сечения²⁹ пропорциональна глубине погружения спиц датчика. Следует также отметить, что ток протекает в основном в пространстве между спицами, поэтому

²⁹ Точный расчет сопротивления требует расчета линий тока в пространстве между спицами.

форма сосуда (если его поперечные размеры превышают расстояние между спицами) практически не влияет на электрическое сопротивление датчика.

1.2 Чтобы реализовать сформулированную идею, необходимо датчик соединить последовательно с резистором, сопротивление которого должно значительно превышать сопротивление жидкости между спицами. В этом случае сила тока практически не будет зависеть от сопротивления датчика. Поэтому напряжение на датчике будет пропорционально его сопротивлению.



Принципиальная схема приведена на рисунке.

1.3 Формула для напряжения на датчике имеет вид:

$$U = IR = \frac{U_0}{R + R_0} R \approx \frac{U_0}{R_0} \frac{A}{z}. \quad (2)$$

1.4 Для экспериментальной проверки полученной формулы необходимо провести измерения напряжения на датчике U при различных значениях высоты уровня z предоставленной жидкости в прозрачном сосуде (где эту высоту можно измерять). Результаты измерений приведены в таблице 1, полученная зависимость показана на графике 1.

Таблица 1.

$z, \text{ мм}$	$U, \text{ мВ}$
13	4,35
21	4,00
30	3,74
38	3,52
46	3,32
54	3,14
62	2,99
69	2,88
79	2,76
87	2,68
95	2,60
103	2,53
112	2,47
119	2,41
127	2,36
136	2,31
143	2,27

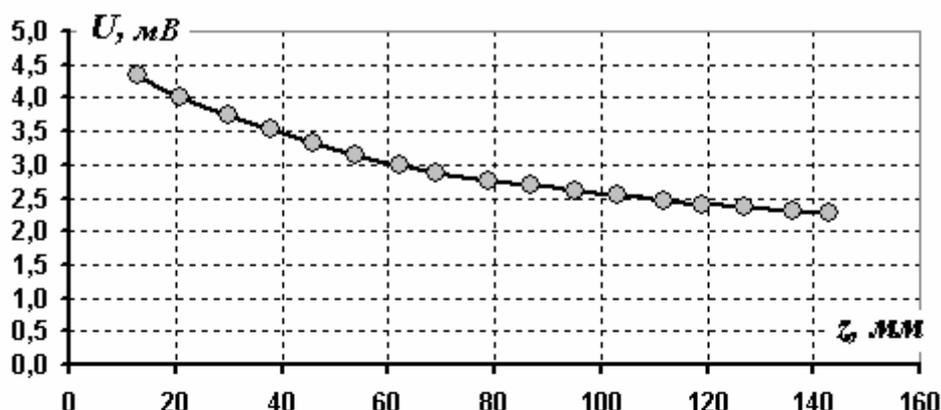


График 1.
Зависимость напряжения от высоты уровня жидкости

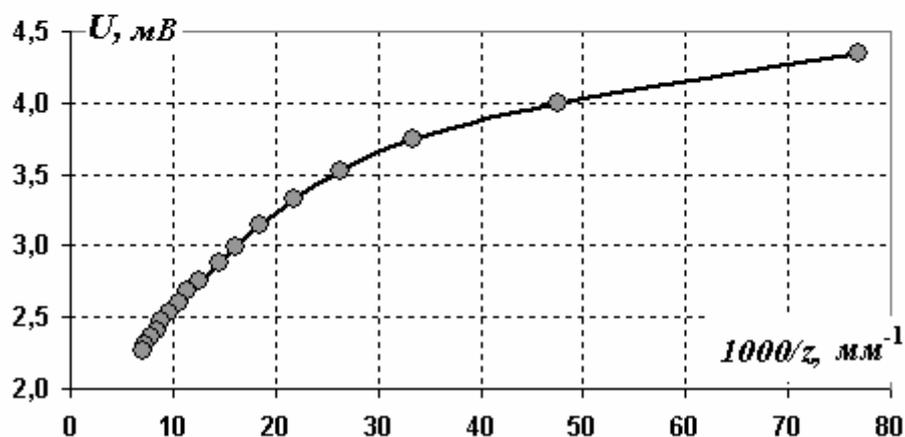


График 2. Линеаризация (попытка 1)

График напоминает график функции (2), по крайней мере – убывающая нелинейная функция. Чтобы проверить применимость формулы (2), полученную зависимость следует линеаризовать. Способ линеаризации подсказывает сам вид функции: необходимо построить зависимость напряжения от величины обратной высоте уровня жидкости.

Линейность этой зависимости будет свидетельствовать о справедливости проверяемой формулы. Результат построения³⁰ на Графике 2. Однако... не о какой линейности речи быть не может! Точки хорошо легли на плавную кривую, поэтому случайные погрешности измерений не могут быть причиной наблюдаемой нелинейности.

Не будем спешить с выводом о неприменимости формулы (1) в данном случае. Попробуем все-таки линеаризовать эту зависимость, тем более, что она нам необходима для выполнения второй, основной части работы.

Возможной причиной нелинейности Графика 2 является систематическая ошибка в определении глубины погружения (причины: часть спиц в крепеже, толщина дна и т.д.). В таком случае зависимость напряжения от глубины погружения должна иметь вид:

$$U = \frac{B}{z + z_0} .$$

Такая зависимость линеаризуется, если построить график зависимости измеренной высоты z от величины, обратной напряжению $1/U$:

$$z = \frac{B}{U} - z_0 .$$

По этому графику можно будет определить и величину систематической погрешности.

Пробуем – График 3. Эта зависимость ближе к линейной, но все же заметно отличается от нее. Здесь причину найти сложно. Поэтому попробуем еще два традиционных метода: логарифмический (может зависимость степенная) и полулогарифмический (или экспоненциальная) масштаб: графики 4, 5.

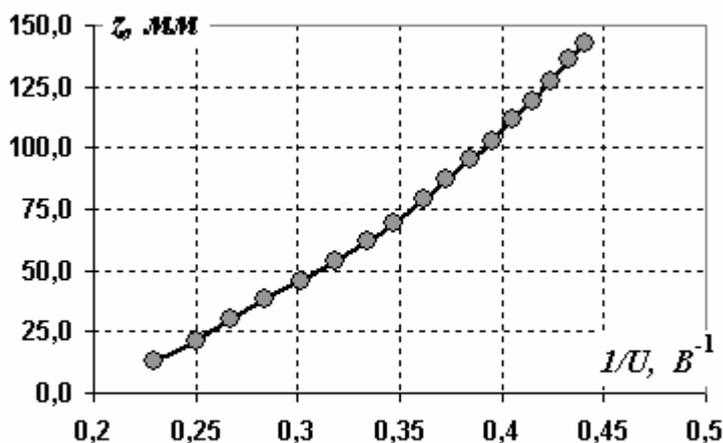


График 3. Линеаризация (попытка 2)

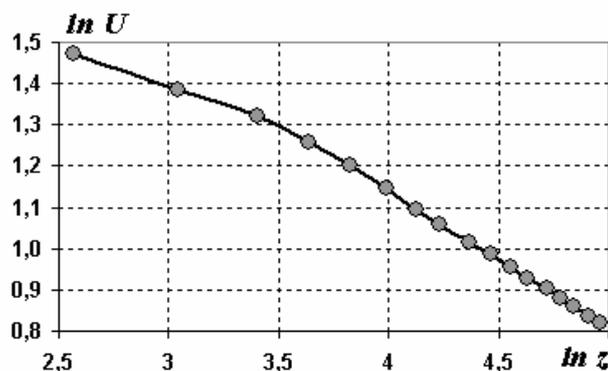


График 4. Линеаризация (попытка 3)

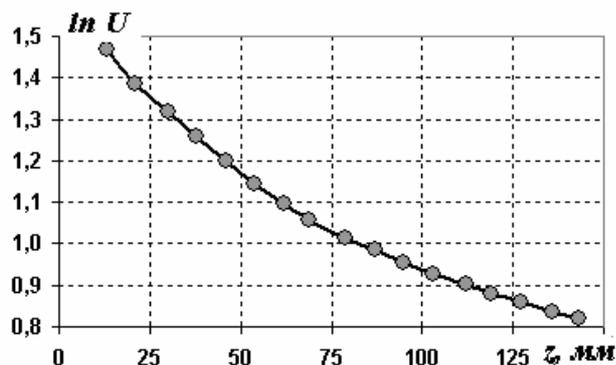


График 5. Линеаризация (попытка 4)

Но и эти попытки не увенчались успехом – зависимости явно нелинейные.

Поэтому следует признать, что формула (1) в данных условиях не применима. Условие задачи не требует объяснения, поэтому необходимо смириться с этим неожиданным результатом. Для выполнения второй части работы не остается другого способа, как использовать График 1, построенный по данным прямых измерений, в качестве градуировочного. То есть измерять напряжение, а значения высоты уровня жидкости снимать с графика. Для этого его, конечно, следует построить побольше и очень аккуратно. Сложно, но зато не надо будет долго считать погрешности.

³⁰ Для экономии места таблицы преобразованных значений опущены.

Заметим, что авторы задач не обязаны предлагать только те вопросы, ответы на которые положительные. Олимпиада – это интеллектуальное соревнование, призванное выявить не только талантливых, но и добросовестных учащихся, которые свои выводы строят на основе собственных результатов и имеющие смелость обоснованно не соглашаться с авторами задач.

2.1 Во второй части работы необходимо последовательно заливать в полость небольшие порции жидкости (по 25 мл), измерять напряжение на датчике U , а затем по градуировочному графику определять значения высоты уровня жидкости z . Результаты проделанной работы представлены в Таблице 2 и на графике 6.

Таблица 2.

$V, \text{мл}$	$U, \text{В}$	$z, \text{мм}$	$r, \text{см}$
25	4,57		
50	4,35	12	
75	4,17	18	3,64
100	4,00	22	4,46
125	3,84	27	3,99
150	3,71	31	4,46
175	3,58	36	3,99
200	3,46	40	4,46
225	3,33	45	3,99
250	3,24	49	4,46
275	3,14	54	3,99
300	3,08	58	4,46
325	3,00	62	4,46
350	2,93	67	3,99
375	2,87	71	4,46
400	2,81	76	3,99
425	2,75	83	3,37
435	2,71	85	3,99
445	2,69	87	3,99
455	2,67	89	3,99
465	2,64	91	3,99
475	2,60	95	2,82
485	2,53	104	1,88
495	2,45	115	1,70
505	2,33	133	1,33
515	2,18	170	0,93

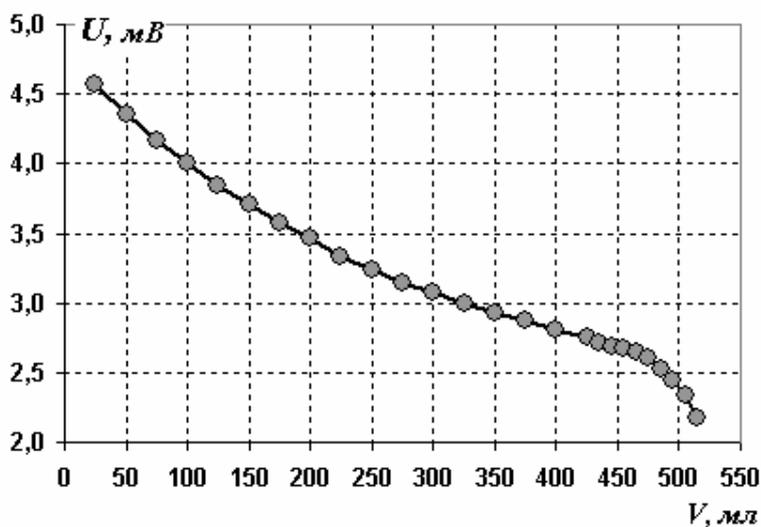


График 6. Зависимость напряжения на датчике от объема налитой жидкости

Красивый и необычный график, но здесь он просто иллюстрирует проделанную работу. Для решения задачи (восстановления формы полости) необходимы численные данные, приведенные в таблице.

Не останавливаясь подробно на выкладках и их анализе, приведем формулу, по которой

рассчитаны значения радиусов r полости на различных высотах: $r = \sqrt{\frac{\Delta V}{\pi \Delta z}}$, где значения

Δz брались как разности значений высот в двух соседних строках. На графике 7 показан построенный профиль полости. Трудно предположить, что боковая поверхность бутылки гофрирована (или, что использованный метод позволил выявить такие детали), поэтому на графике проведена сглаживающая кривая.

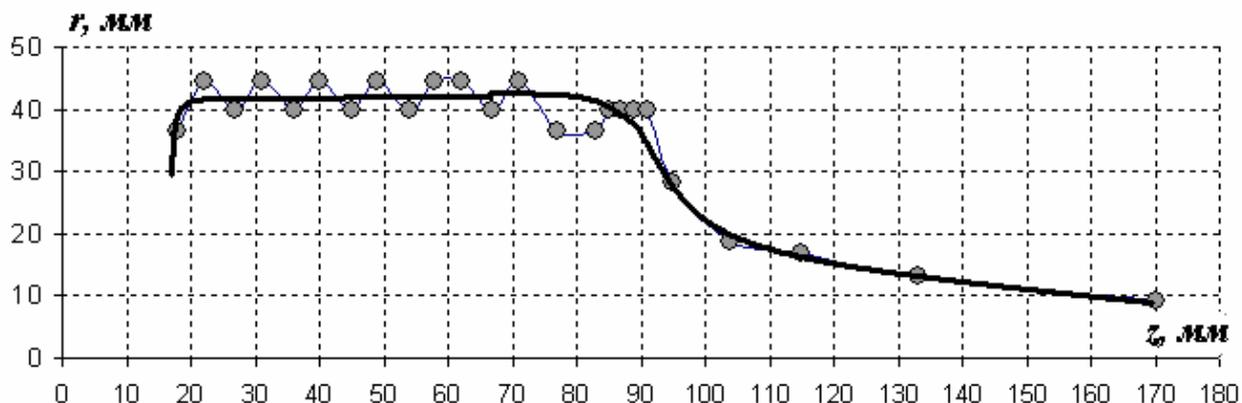


График 7. Профиль бутылки

В данной задаче использован метод расчета основанный на использовании малых разностей, раскритикованный при обсуждении предыдущей задачи. Но как следует из полученного результата, он привел к успеху. Помимо погрешностей, связанных с использованием этого метода, заметную погрешность вносит использование градуировочного графика: «гофрирование» боковой поверхности связано, по-видимому, с неточностями снятия значений по этому графику (ошибки округления).

Признаемся, что представленные здесь результаты – это лучшее, чего удалось добиться авторам задачи при многократных попытках самостоятельно выполнить эту задачу. Остальные попытки дали гораздо худший результат.

В следующей задаче помимо градуировки рассматривается еще один важный вопрос – выбор оптимального режима работы измерительной установки. Косвенно это проблема затрагивалась и в предыдущих задачах. Критерии оптимальности могут быть различными, но наиболее популярными являются следующие:

- обеспечение максимального диапазона изменения параметров исследуемого явления;
- обеспечение максимальной точности измерений;
- простота измерений и последующей обработки;
- уменьшение числа измеряемых и контролируемых параметров.

В любом случае, когда вам необходимо самостоятельно разработать схему экспериментальной установки, уточнить методику проведения измерений, выбрать рабочие параметры, прежде всего следует четко понимать свою основную цель, на основании чего и сформулировать критерий оптимальности в данной конкретной задаче.

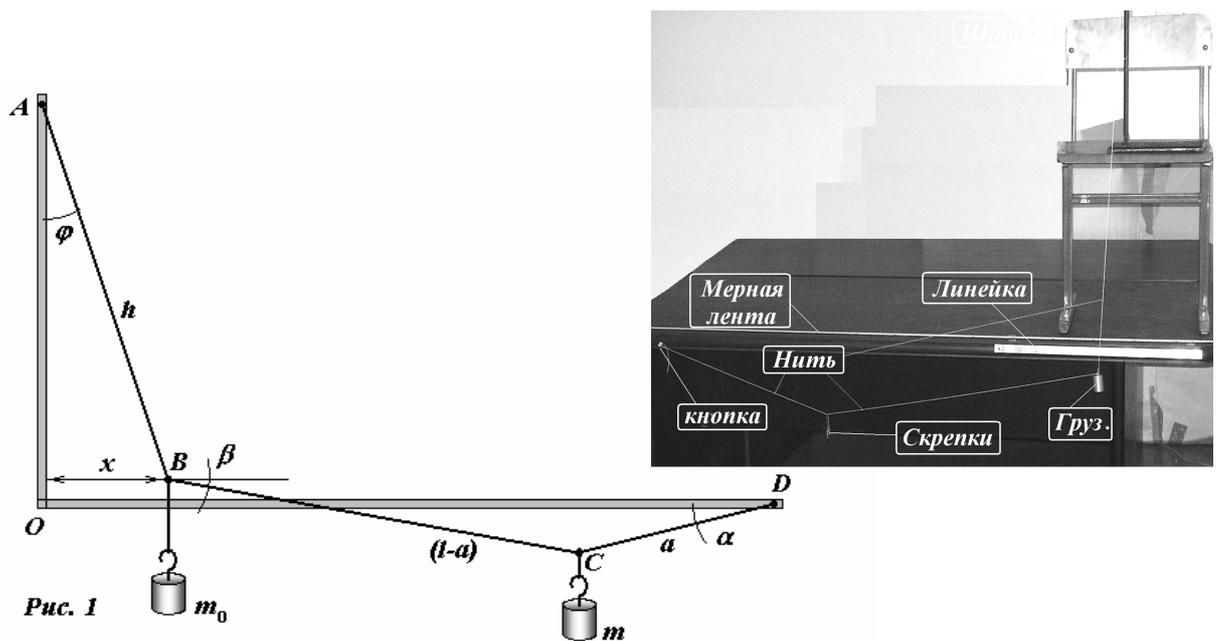


Задача 12.

«Взвешивание без весов, или весы висячие»

Приборы и оборудование: Штатив, нитки с кнопкой, линейка 40 см, линейка пластмассовая 10-20 см, мерная лента 1,5 м, скрепки канцелярские 10 штук, миллиметровая бумага, груз известной массы, высокий сосуд с водой, скотч, кусочек сырого картофеля.

Соберите установку, схема которой показана на фотографии и на рис.1. В качестве вертикальной стойки используйте штатив, который поднимите как можно выше – на стол поставьте стул, а на него уже штатив. Длина вертикальной нити до точки крепления груза известной массы m_0 должна быть как можно больше (не менее 100 см). В положении равновесия горизонтальная нить должна располагаться вдоль края стола, один конец этой нити прикрепите к грузу известной массы, второй закрепите на торце стола с помощью кнопки. Длина этой нити тоже должна быть как можно длиннее (не менее 120 см). На торце стола прикрепите с помощью скотча линейку длиной 40 см для измерения отклонения вертикальной нити x . Вдоль края стола разверните мерную ленту для измерения положения (a - расстояние до точки крепления) измеряемых грузов m , в качестве которых используйте канцелярские скрепки.



Часть 1. Оптимальное положение точки подвеса.

- 1.1 Измерьте зависимость величины смещения x от положения точки подвеса измеряемого груза a , при постоянной массе этого груза. Число подвешенных скрепок задайте самостоятельно, свой выбор обоснуйте.
- 1.2 Постройте график полученной зависимости.
- 1.3 Укажите оптимальное положение точки подвеса грузов для дальнейших измерений.

Часть 2. Градуировка.

2.1 Измерьте зависимость отклонения нити x от числа скрепок N , подвешенных в оптимальном положении.

2.2 Постройте график полученной зависимости.

Теоретический анализ показывает, что при не очень больших углах отклонения нити от вертикали величина отклонения x связана с отношением масс грузов приближенным законом «трех вторых»:

$$x^{3/2} = C \frac{m}{m_0}. \quad (1)$$

где C - постоянный коэффициент, зависящий только от геометрических размеров установки и точки крепления грузов.

Примечания.

1. Не старайтесь получить эту формулу, потому что, во-первых, это не будет оцениваться, во-вторых, потратите много драгоценного времени, в-третьих, все равно не получите.

2. Справка для экспериментаторов $x^{3/2} = x\sqrt{x}$.

2.2 На основании полученных экспериментальных данных проверьте, выполняется ли закон (1) для вашей установки.

2.3 Определите массу одной скрепки.

Часть 3. Проверка закона Архимеда.

Прикрепите к нити в оптимальной точке подвеса пластмассовую линейку, так чтобы ее нижний конец находился у дна сосуда. Доливая воду в сосуд легко добиться, чтобы часть линейки оказалась погруженной в воду.

3.1 Измерьте зависимость отклонения нити от длины погруженной в воду части линейки.

3.2 На основании полученных данных докажите справедливость закона Архимеда: выталкивающая сила пропорциональна весу вытесненной жидкости.

3.3 Определите экспериментально плотность сырого картофеля.

Комментарии к условию задачи.

1. Подготовка и выполнение данной задачи не вызывает особых затруднений. Результаты измерений стабильны, достаточно точны и не обычны. Поэтому эту задачу можно рекомендовать учащимся 9 класса.

2. Пластмассовая линейка, входящая в перечень оборудования, необходима для проверки закона Архимеда – ее надо будет опускать в сосуд с водой. Поэтому диаметр сосуда должен быть таким, чтобы линейка входила в него вертикально. Удобно использовать обычную мензурку.

Решение и обсуждение.

В данной задаче предложена оригинальная конструкция весов. Главное ее достоинство – отсутствие трущихся деталей. Правда это достоинство достигается ценой усложнения градуировки – шкала весов, судя по формулам, приведенным в условии не линейна. Первые две части работы предназначены для настройки «прибора»: выбора оптимального режима и градуировки. В данном случае оптимальным, будет такой выбор параметров, при котором достигается максимальная точность измерений. Непосредственно измеряемой величиной является отклонение, измеряемое линейкой. Абсолютная погрешность измерения линейки является приблизительно постоянной, поэтому относительная погрешность будет минимальна при максимальном отклонении нити от вертикали. Скорее всего, приведенная формула (1) является приближенной, справедливой при небольших отклонениях. Поэтому необходимо искать некий компромисс: очень малые отклонения сложно измерять, при больших отклонениях может оказаться неприменимой приведенная формула. Именно поэтому требуется предварительная градуировка весов. В последней части работы предлагается проверить закон Архимеда (как будто у кого-то есть сомнения в его справедливости), а затем измерить плотность картофеля. Идея этого измерения была реализована еще самим Архимедом – гидростатическое взвешивание. Поэтому методика измерения хорошо известна. Можно приступить к выполнению работы³¹.

Часть 1.

1.1 Для измерений следует взять максимальное число скрепок $N = 10$, так как в этом случае отклонения максимальны, что облегчает измерения и повышает их точность. Результаты измерений зависимости отклонения грузов x от положения точки подвеса a приведены в **Таблице 1**.

Таблица 1.

$a, \text{ см}$	5,0	10	15	20	25	30	35	40	45
$x, \text{ см}$	2,5	4,5	6,5	8,0	9,4	11	11,5	12	12,6

50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
13	13,1	13	13	12,5	12,1	11,5	11	10	8,5

График полученной зависимости представлен на рис. 1.

Из полученных результатов следует, что максимальное отклонение достигается, когда точка подвеса находится в центре горизонтальной нити, поэтому эта точка подвеса является оптимальной для дальнейших измерений. Очевидный результат!

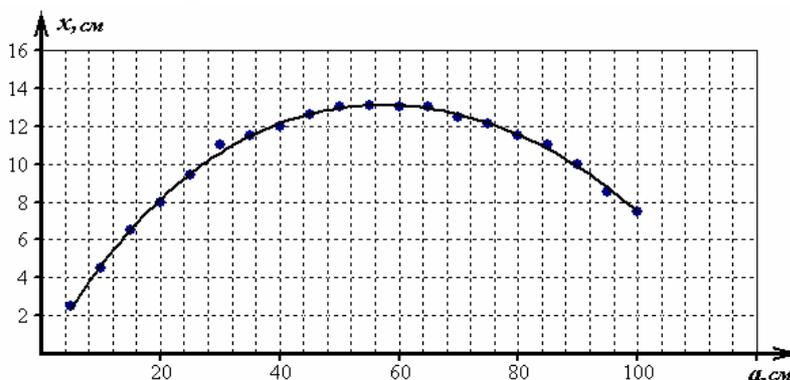


Рис. 1

³¹ Все экспериментальные данные приведены для установки с параметрами $l = 110 \text{ см}$, $h = 120 \text{ см}$, $m_0 = 15 \text{ г}$, погрешностями этих величин будем пренебрегать.

Часть 2. Градуировка.

2.1 -2.2 Результаты проведенных измерений зависимости отклонения нити x от числа подвешенных скрепок N представлены в таблице 2.

Таблица 2.

N , штук	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x , см	3,1	4,4	5,8	6,9	8,1	9,2	10,3	11,2	12,2	13,0

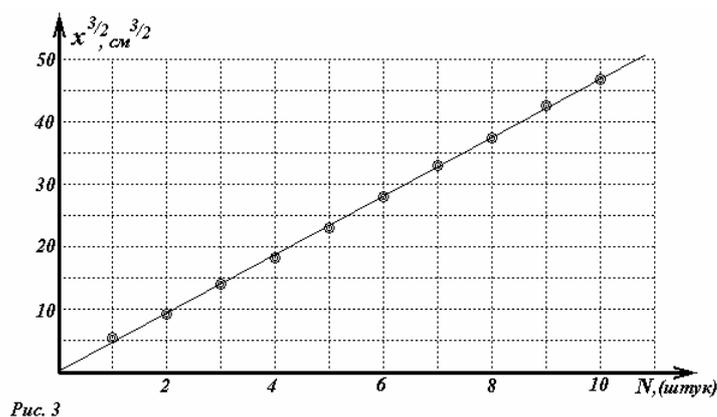
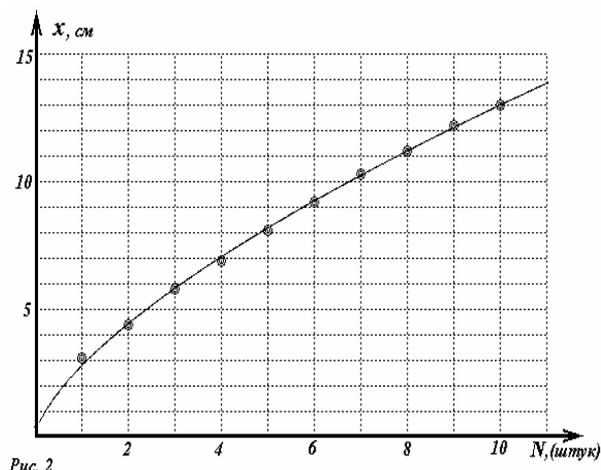


График полученной зависимости изображен на Рис. 2. Как видно из графика полученная зависимость является нелинейной. Для проверки выполнимости закона «трех вторых» предпочтительнее построить график зависимости $x^{3/2}$ от числа подвешенных скрепок³² (Рис. 3). Прекрасно видно, что эта зависимость является прямо пропорциональной, что однозначно подтверждает справедливость приведенной в условии формулы в исследованном диапазоне отклонений. Таким образом, установлена связь между массой подвешенного груза (единица измерения – масса одной скрепки) и отклонением груза. Эту зависимость можно использовать в качестве **градуировочной**, позволяющей по измеренному отклонению определять массу груза. Удобнее, конечно пользоваться подтвержденной функциональной зависимостью. Если бы оказалось, что закон «трех вторых» не выполняется, то в дальнейшем можно было бы использовать непосредственно график 2.

Подчеркнем, диапазон дальнейших измерений не должен выходить за пределы диапазона проведенной градуировки, так как вне этого предела полученные значения будут не обоснованными (хотя, и могут быть верными).

2.3. Для оценки массы одной скрепки необходимо знать коэффициент пропорциональности в формуле (1). Найти его значение по проведенным измерениям нельзя: нам не известно отношение масс грузов, известно только как изменяется это отношение – пропорционально числу скрепок. Поэтому для определения этого коэффициента можно воспользоваться скрепками: так если в качестве груза m_0 взять 8 скрепок, а в качестве груза m две скрепки, то отношение их масс известно точно $\frac{m'}{m'_0} = \frac{1}{4}$.

При таких грузах отклонение нити при оптимальной точке подвеса составило

³² Можно также использовать и более надежный метод: построить данную зависимость в логарифмическом масштабе и с помощью МНК определить: является ли полученная зависимость степенной; найти показатель степени и оценить его погрешность. Но... не все знают, что такое логарифм.

$x_{0,25} = (12,0 \pm 0,1) \text{ см}$. В качестве погрешности мы выбрали цену деления линейки. Теперь коэффициент пропорциональности легко находится из формулы (1)

$$C = \frac{m'_0}{m'} x_{0,25}^{3/2} = 4x_{0,25}^{3/2} = 4 \cdot 12^{3/2} \approx 166 \text{ см}^{3/2}; \quad \Delta C = \frac{3}{2} C \frac{\Delta x_{0,25}}{x_{0,25}} \approx 2 \text{ см}^{3/2}.$$

В принципе, для определения массы скрепки (и для выполнения условия задачи), рассчитывать этот коэффициент необязательно, но, найдя его, мы закончили построение градуировочной функции.

Теперь можно воспользоваться полученными ранее данными: при $m_0 = 15 \text{ г}$ и $m = 10m_1$ (m_1 - масса одной скрепки) величина отклонения нити составила $x = (13,0 \pm 0,1) \text{ см}$. Используя очередной раз формулу (1), находим

$$m_1 = \frac{m_0}{10} \cdot \frac{x^{3/2}}{C} \approx 0,42 \text{ г}. \quad \Delta m_1 = m_1 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} \approx 0,01 \text{ г}$$

Возможно, что погрешность полученного результата занижена.

Чтобы каждый раз не заниматься решением уравнения (1), можно представить градуировочную функцию в более удобном виде. Для этого обозначим $C = 4A^{3/2}$, где $A = x_{0,25} = (12,0 \pm 0,1) \text{ см}$ и выразим значение массы и формулы (1):

$$m = m_0 \frac{x^{3/2}}{C} = \frac{m_0}{4} \left(\frac{x}{A}\right)^{3/2}.$$

В этой записи присутствует отношение отклонений, поэтому можно их измерять в любых единицах (например, в единицах длины скрепки). Относительная погрешность измерения массы в таком случае запишется в виде

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2}.$$

Часть 3. Проверка закона Архимеда.

Как и на любых весах, на данной установке реально измеряется вес тела (сила натяжения нити), который в обычно пропорционален массе. Если же тело частично погрузить в жидкость, то его вес уменьшится на величину силы Архимеда. Поэтому для проверки этого закона можно исследовать, как зависит вес тела от глубины его погружения. При вертикальном погружении пластмассовой линейки в воду, объем погруженной части (поэтому и сила Архимеда) пропорционален глубине погружения. Следовательно, линейное уменьшение веса линейки с ростом глубины погружения подтверждает справедливость закона Архимеда.

В свою очередь, нами доказано, отклонение нити в степени «три вторых» пропорционально весу тела. Для проверки закона Архимеда можно измерить зависимость величины отклонения x от глубины погружения линейки z . Тогда линейное убывание $x^{3/2}$ при увеличении z в очередной раз подтвердит правоту Архимеда.

Результаты измерения величины отклонения нити x от глубины погружения линейки z (при измерениях использовалась линейка длиной $L = 10 \text{ см}$) даны в Таблице 3, а график этой зависимости показан на рис. 4. На рис. 5 построен линеаризованный график этой же зависимости.

Таблица 2.

z , см	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x , см	10,6	10,1	9,8	9,3	8,9	8,5	8,0	7,5	6,9	6,4

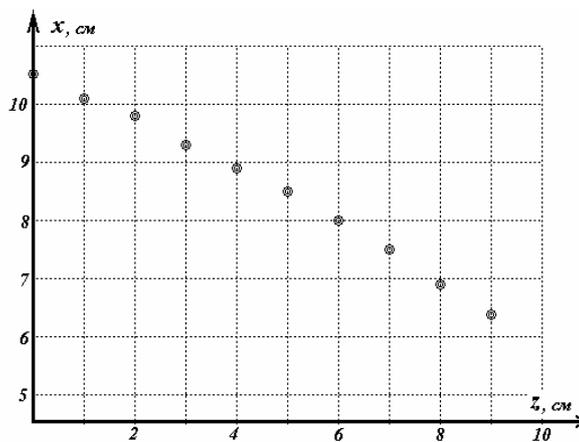


Рис. 4

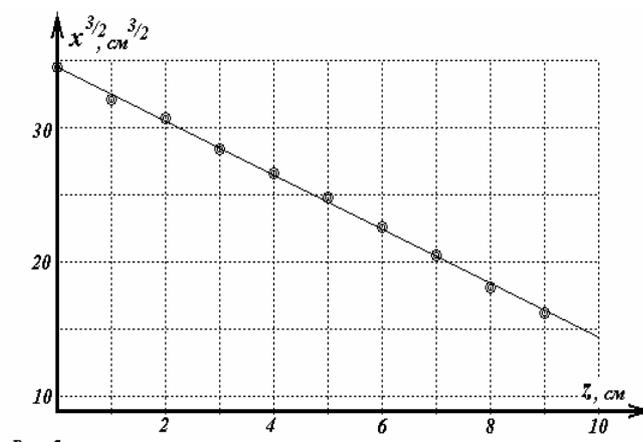


Рис. 5

Эта зависимость практически линейна, что подтверждает справедливость закона Архимеда.

Теоретики, вынужденные заниматься экспериментом, могут облечь эти простые рассуждения в алгебраическую форму, а затем обработать результаты измерений более изящно.

Так вес линейки, частично погруженной в воду равен

$$P = mg - F_A = \rho SLg - \rho_0 S z g = mg \left(1 - \frac{\rho_0 z}{\rho L} \right).$$

С помощью градуировочной функции можно получить

$$\left(\frac{x}{x_0} \right)^{3/2} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{z}{L} \right),$$

где x_0 - отклонение нити для не погруженной в воду линейки. График 5 лучше строить в «нормированных» координатах $\left(\left(\frac{x}{x_0} \right), \left(\frac{z}{L} \right) \right)$, тогда коэффициент наклона прямой будет равен отношению плотностей воды и пластмассы (график б)

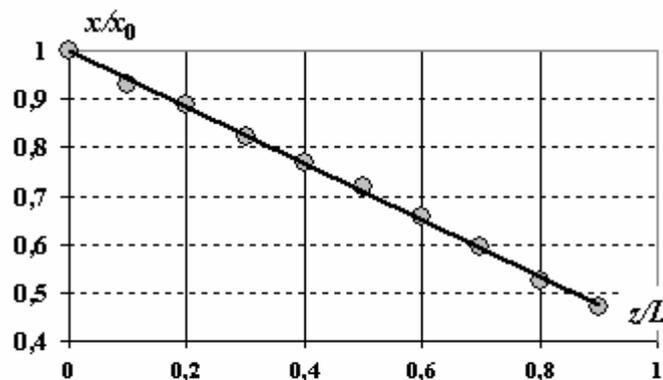


График б. Проверка закона Архимеда (нормировка)

3.3 Так как закон Архимеда выполняется в наших условиях, то им можно воспользоваться для определения плотности сырого картофеля. Подвесим на нити в точке оптимального подвеса кусочек сырого картофеля, при этом отклонение нити равно $x_0 = 11,3$ см. Поднесем к кусочку картофеля стакан с водой так, чтобы он полностью погрузился в воду, при этом отклонение нити составляет всего $x_1 = 3,2$ см. Используя закон Архимеда, можно доказать, что плотность тела рассчитывается по формуле

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{P_0}{P_0 - P_1},$$

где P_0 - вес тела в воздухе, P_1 - вес тела в воде ρ_0 - известная плотность воды. Так как в нашей установке вес тела пропорционален отклонению в степени три вторых, то последнюю формулу можно преобразовать к «расчетному виду»:

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{P_0}{P_0 - P_1} = \rho_0 \frac{1}{1 - \frac{P_1}{P_0}} = \frac{\rho_0}{1 - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{3/2}} \approx 1,18 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Расчет погрешности этого результата проводится следующим образом:

$$\eta = \frac{x_1}{x_0} \approx 0,283; \quad \Delta\eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2} = 0,0091$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 - \eta^{3/2}}; \quad \Delta\rho_1 = \left| \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \right| \Delta\eta = \frac{3\eta^{1/2} \rho_0}{2(1 - \eta^{3/2})^2} \approx 0,01 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Небольшое дополнение.

Использованный в данной задаче закон «трех вторых» может быть получен теоретически, на основании законов динамики. Действительно оказывается, что он справедлив при малых отклонениях. Проведенные измерения, подтвердившие экспериментально этот закон, подтверждают, что в использованном диапазоне измерений приближение малых углов вполне применимо.

Дополнение. Теоретическое описание.

Все обозначения приведены на Рис. 1. Отметим, что длина l «горизонтальной» нити BCD в рассматриваемой установке равна расстоянию между точкой крепления D основанием O вертикали, опущенной из верхней точки подвеса A , а длина h «вертикальной» нити AB равна высоте точки подвеса AO . То есть при отсутствии груза m нить занимает положение AOD .

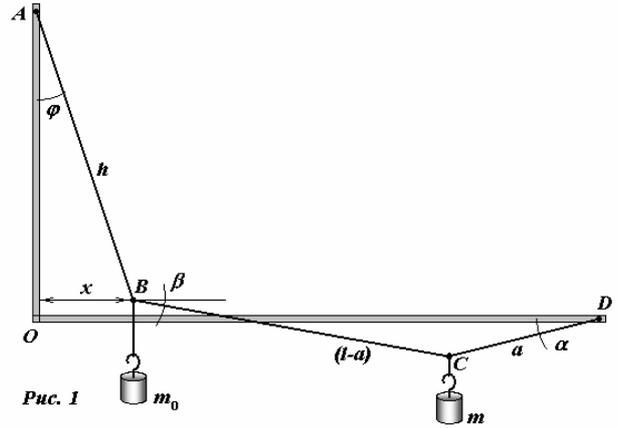


Рис. 1

Найдем зависимость отклонения x точки B от масс подвешенных грузов.

Положению равновесия соответствует минимум потенциальной энергии.

Потенциальная энергия системы грузов выражается формулой

$$U = -m_0gh \cos \varphi - mga \sin \alpha. \quad (1)$$

Понятно, что положение грузов однозначно определяется одним углом, в качестве такого «определяющего» угла выберем φ угол отклонения нити AB от вертикали. Двигаясь по нити, перейдем от точки A до точки D , тогда проекции таких смещений на горизонталь равны

$$h \sin \varphi + (l - a) \cos \beta + a \cos \alpha = l, \quad (2)$$

а на вертикаль

$$h \cos \varphi + (l - a) \sin \beta - a \sin \alpha = h. \quad (3)$$

В ходе измерений угол отклонения нити φ достаточно мал, поэтому и здесь будем считать его малым, так что можно считать, что $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, в дальнейшем также будем оставлять члены только первого порядка по φ . Используя это приближение, перепишем выражения (2)-(3) в виде

$$\begin{aligned} (l - a) \cos \beta &= (l - x) - a \cos \alpha \\ (l - a) \sin \beta &= a \sin \alpha \end{aligned}, \quad (4)$$

(здесь обозначено $h \sin \varphi = x$ - измеряемое отклонение, имеющее первый порядок малости). Далее возводим эти выражения (4) в квадрат и складываем

$$(l - a)^2 = (l - x)^2 - 2a(l - x) \cos \alpha + a^2.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малым слагаемым x^2 , выразим значение косинуса угла с точностью до первого порядка

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{l}} \approx 1 - \frac{x}{a} + \frac{x}{l} = 1 - \frac{l - a}{la} x. \quad (5)$$

Синус этого угла равен

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{l - a}{la} x\right)^2} \approx \sqrt{2 \frac{l - a}{la} x}. \quad (6)$$

Теперь потенциальная энергия системы может быть выражена через величину отклонения нити

$$U = -m_0gh \cos \varphi - mga \sin \alpha \approx m_0g \frac{x^2}{2h} - mg \sqrt{2 \frac{l - a}{la} x}.$$

Вычисляя производную

$$U' = m_0 g \frac{x}{h} - mg \sqrt{2 \frac{l-a}{la} \frac{1}{2\sqrt{x}}},$$

и приравнявая ее к нулю, получим формулу, определяющую положение равновесия системы

$$x^{3/2} = \frac{m}{m_0} h \sqrt{\frac{(l-a)a}{2l}}. \quad (7)$$

Получен «третий закон Кеплера» - куб смещения пропорционален квадрату отношения масс. Фактически эта формула является теоретической основой данного экспериментального задания. Отметим, что при постоянных массах грузов максимальное смещение нити достигается при $a = \frac{l}{2}$, то есть измеряемый груз следует располагать по середине горизонтальной нити.



3.7 Немного о поправках.

В этой главе мы движемся по пути ухудшения условий проведения эксперимента: линейные зависимости – нелинейные зависимости – неизвестные зависимости; прибор по своему назначению – нетрадиционное использование приборов – установка, требующая предварительной градуировки. Но и это еще не все – при проведении экспериментальных исследований достаточно часто ситуации, в которых экспериментальные данные противоречат не только проведенному теоретическому анализу, но и законам физики. Вполне возможно, что причиной такого казуса является некий побочный фактор (хорошо, если один), не учтенный при разработке методики эксперимента. Иногда ситуацию спасает введение **поправок** в результаты уже проведенных измерений. Подчеркнем, что введение каждой поправки должно быть оправдано, описано и обосновано. Один пример на эту тему представлен в данном параграфе.

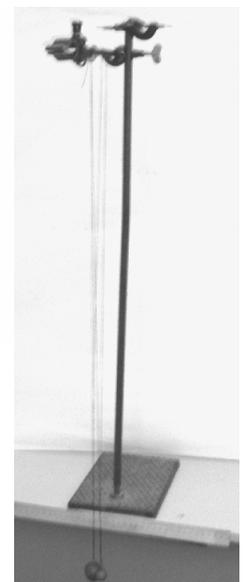
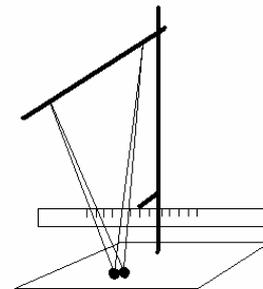


Задача 13. «Неупругий удар».

При столкновениях пластичных тел (например, шариков из пластилина) происходит неупругий удар – удар, при котором часть кинетической энергии шариков переходит во внутреннюю энергию. В данной задаче предлагается исследовать столкновения именно в случае неупругого удара.

Приборы и оборудование:

1. Штатив.
2. Линейка 40 см.
3. Пластилин (на одного участника один целый брусок)
4. Нитки.
5. Две скрепки.



Соберите установку, показанную на фотографии и на схеме. Линейку удобно закрепить на краю стола. Чтобы уменьшить закручивание нитей каждый шарик удобно подвешивать на двух расходящихся нитях (бифилярный подвес). Длина повеса должна быть не менее 60 см. К нижней части подвеса привяжите скрепку, к которой удобно прикреплять пластилиновые шарики. Для измерения отношения масс шариков можете использовать линейку как рычажные весы.

Рекомендация: удобно изготавливать шарики, массы которых относятся как целые числа: 1:2, 2:1, 3:4 и т.д.

Вам предстоит исследовать столкновения шариков, один из которых изначально неподвижен – желательно, чтобы после столкновения шарики двигались вместе.

Обозначим массу движущегося (ударяющего) шарика m_0 , а массу неподвижного - m_1 , а их отношение $\frac{m_0}{m_1} = \eta$. Начальное отклонение нити от вертикали, измеренное по линейке обозначим x_0 , а максимальное отклонение после удара - x_1 .

Часть 1 – Теоретическая.

1.1 Рассмотрите неупругий удар при котором один шарик массой m_1 покоится, а второй массой m_0 налетает на него со скоростью v_0 . Покажите, что скорость слипшихся шариков после удара определяется формулой

$$v_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} v_0. \quad (1)$$

1.2 Покажите, что отношение количества теплоты, выделившейся при неупругом ударе, к начальной кинетической энергии шарика определяется формулой

$$\frac{Q}{E_0} = \frac{m_1}{m_1 + m_0}. \quad (2)$$

1.3 Покажите, что при малых углах отклонения (а в данной задаче их можно считать малыми, если длина подвеса значительно превышает величины отклонений) потенциальная энергия шарика пропорциональна квадрату отклонения нити x и массе шарика m

$$U = Amx^2, \quad (3)$$

где A - постоянный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров установки;

а скорость шарика в нижней точке пропорциональна максимальному отклонению

$$v_0 = Bx_0, \quad (4)$$

где B - постоянный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров установки.

Часть 2. Отношение скоростей.

2.1 Измерьте зависимости отклонения слипшихся шариков после удара x_1 от начального отклонения ударяющего шарика x_0 при отношении их масс равных $\frac{m_0}{m_1} = 1$ и $\frac{m_0}{m_1} = 2$.

Постройте графики полученных зависимостей.

2.2 На основании полученных экспериментальных данных проверьте, можно ли считать, что отношение скорости шариков после удара к скорости ударяющего шарика является постоянной величиной. Проверьте выполнимость формулы (1) в вашем случае.

Часть 3. Потери энергии.

3.1 Измерьте зависимость отношения скорости шариков после удара к скорости шарика до удара от отношения их масс при неизменном начальном отклонении x_0 . Постройте график этой зависимости.

3.2 Постройте график зависимости относительных потерь механической энергии при неупругом ударе $\delta = \frac{Q}{E_0}$ от отношения масс шариков. $\frac{m_0}{m_1} = \eta$.

3.3 Сравните полученные графики с теоретическими зависимостями. Объясните полученные результаты.

При необходимости внесите корректировки и поправки в ваши расчеты.

Комментарии к условию задачи.

1. Подготовка оборудования не представляет никаких сложностей. Единственное пожелание – длины нитей должны быть порядка 1 метра. При этом их крепление должно быть проведено предельно аккуратно: в нижнем положении шарики должны быть на одной высоте, движение шариков должно происходить в одной вертикальной плоскости.
2. Для изготовления пластилиновых шариков известного отношения масс можно кусок пластилина разделить на несколько равных частей (например на 5) с помощью линейки, из которых потом лепить нужные шарики. Можно добавить в перечень оборудования весы с разновесами.
3. К сожалению, точность измерений в данной задаче не слишком высока, поэтому можно рекомендовать все измерения проводить 3-5 раз (авторы ограничились двумя), а в дальнейших расчетах использовать средние значения отклонений.

Решение и обсуждение.

Законы удара (в том числе неупругого) настолько подробно изучаются в курсе физике средней школы, что условие задачи и порядок ее выполнения очевидны и не требуют предварительного обсуждения.

Часть 1 – Теоретическая.

1.1 – 1.2 приведенные формулы следуют из законов сохранения импульса и энергии при ударе, более подробный вывод можете провести самостоятельно.

1.3 Из закона сохранения механической энергии следует, что при движении шарика от верхней точки до момента столкновения изменение его потенциальной энергии

$\Delta U = mgl(1 - \cos \alpha)$ равно приобретенной кинетической энергии $E = \frac{mv^2}{2}$. Косинус угла

начального отклонения при малости последних выражается через измеряемое отклонение x следующим образом:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{l} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Следовательно, изменение его потенциальной энергии равно

$$\Delta U = \frac{mgx^2}{2l},$$

что подтверждает формулу (3). Приравнявая это выражение к кинетической энергии в нижней точке, получим, что его скорость

$$v = x\sqrt{\frac{g}{2l}},$$

что совпадает с формулой (4).

Часть 2. Отношение скоростей.

Из формулы (1) следует, что отношение скорости шариков после удара, к скорости ударяющего шарика есть величина постоянная, зависящая от отношения масс. Так как скорость шарика в нижней точке пропорциональна величине отклонения, то постоянство отношения скоростей должно приводить к постоянству отношения отклонений до и после удара. Поэтому и необходимо измерить зависимость, указанную в п.2.1. Результаты измерений приведены в таблице 1 и на графиках рис. 1. (для каждого угла отклонения проведено два измерения)

Таблица 1.

$x_0, \text{мм}$	$\eta = 1$		$\eta = 2$	
	$x_1, \text{мм}$	$x_1, \text{мм}$	$x_1, \text{мм}$	$x_1, \text{мм}$
200	105	105	150	150
180	100	95	140	140
160	85	80	125	120
140	80	80	110	110
120	70	70	100	100
100	60	55	85	85
80	50	50	70	70
60	40	40	55	55
40	30	30	40	40

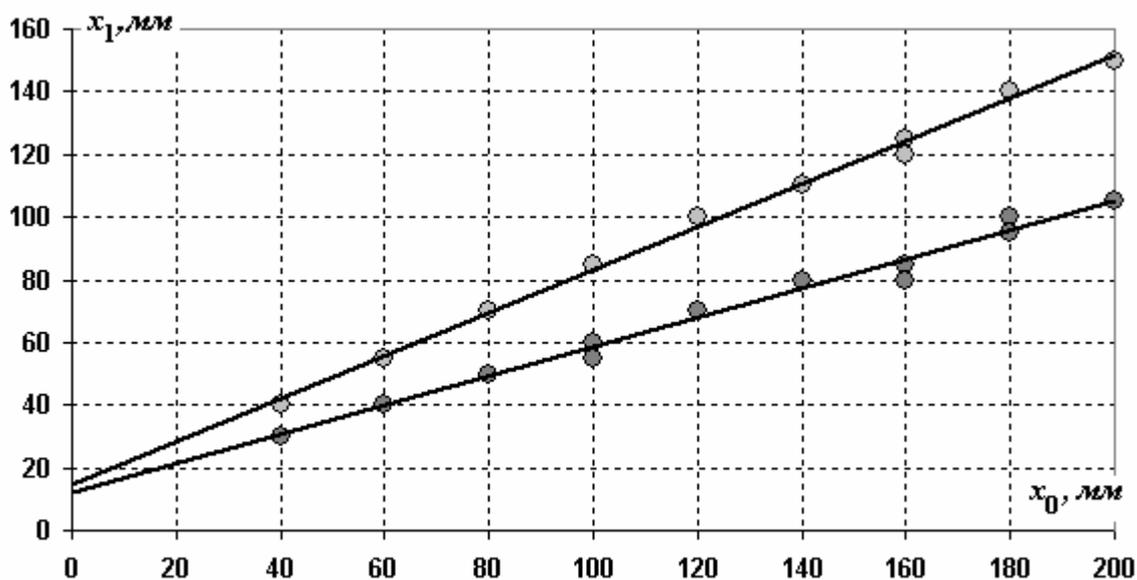


График 1. Зависимость отклонения после удара от начального отклонения

2.2 Полученные результаты неожиданны: связь между отклонениями линейная, но не прямо пропорциональная (прямые, не проходят через начало координат). Этот результат требует осмысления и объяснения³³. Скорее всего, выявленное постоянное смещение связано с неправильным измерением величины отклонения после удара. Подтверждением этой гипотезы служит то обстоятельство, что обе прямые пересекают ось ординат практически в одной точке. Причиной этой систематической ошибки может служить, например, то, что шарики имеют конечные размеры, приводя конечности размеров шарика, приводящее к тому, что в положении равновесия нити не вертикальны. Эта

³³ Отклонения после столкновения (а следовательно, и скорости) превышают теоретические значения, поэтому обвинить виноватым сопротивление воздуха нельзя.

выявленная систематическая ошибка может быть исправлена введением **поправки**. По графикам можно определить, что прямые пересекают ось ординат в точке, координата которой примерно равна $\delta x_1 \approx 13 \text{ мм}$. Поэтому в качестве величины отклонения после удара следует взять «исправленную» величину $\tilde{x}_1 = x_1 - \delta x_1$. С учетом поправки, величины отклонений (и скоростей) оказываются прямо пропорциональны друг другу, как того требует формула (1). По графикам также можно определить коэффициенты наклона (они не зависят от постоянной поправки)

$$\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right)_{\eta=1} \approx 0,47 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right)_{\eta=2} \approx 0,69,$$

которые близки к теоретическим значениям 0,50 и 0,67, соответственно. Следовательно, можно считать, что формула (1) подтверждается экспериментально.

Полученные зависимости при наличии времени могут быть обработаны по МНК. В результате расчетов коэффициентов линейной зависимости $x_1 = ax_0 + b$ оказались равными:

для $\eta = 1$: $a = 0,47 \pm 0,03, \quad b = 12 \pm 3$

для $\eta = 2$ $a = 0,69 \pm 0,02, \quad b = 14 \pm 3.$

Эти результаты более надежно подтверждают сделанный вывод о справедливости формулы (1).

Часть 3. Потери энергии.

Найденная поправка к измерению смещения после столкновения должна проявиться и в изучении потерь энергии при неупругом ударе.

Для проведения измерений необходимо подвешивать шарики различных масс. При этом для каждой пары разных шариков можно (и нужно) получить два результата: первый раз отклонять один шарик, а второй – другой.

Результаты измерений приведены в таблице 2. (Все измерения проведены при начальном отклонении $x_0 = 120 \text{ мм}$).

Таблица 2.

Отношение масс η	Конечное отклонение x_1 , мм	Отношение скоростей	Потери энергии, δ
1	70	0,58	0,32
2	100	0,83	-0,04
0,5	40	0,33	0,67
1,33	80	0,67	0,22
0,75	65	0,54	0,32
4	110	0,92	-0,05
0,25	20	0,17	0,86
1	70	0,58	0,32
2	100	0,83	-0,04
0,5	35	0,29	0,74
1,33	85	0,71	0,12
0,75	65	0,54	0,32
4	105	0,88	0,04
0,25	20	0,17	0,86

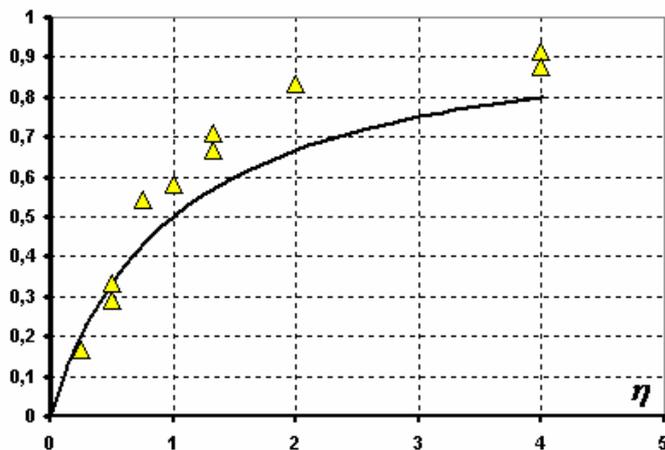


Рис. 2 Зависимость отношения скоростей от отношения масс (без поправки на начальное смещение)

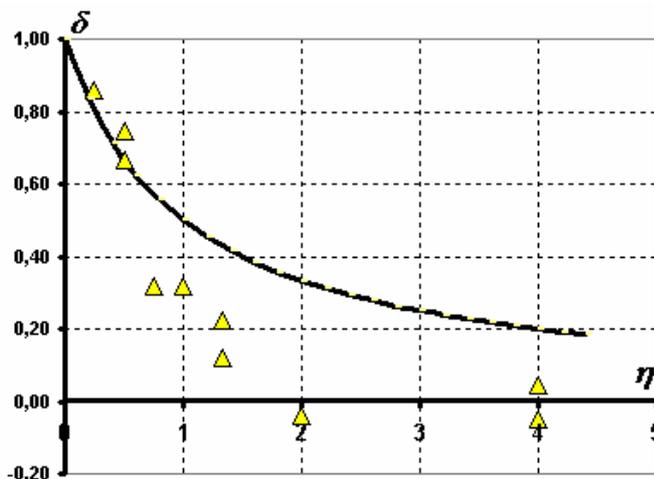


Рис.3 Зависимость доли потерь от отношения масс (без учета поправки на начальное смещение)

Для построения требуемых зависимостей следует по экспериментальным данным рассчитать необходимые величины: отношение скоростей и относительные потери механической энергии. Так отношение скоростей, как и ранее, равно отношению отклонений

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{x_1}{x_0}. \quad (1)$$

Долю энергии перешедшей в тепло по экспериментальным данным следует рассчитывать следующим образом:

$$\delta = \frac{Q}{E_0} = \frac{m_0 v_0^2 - (m_0 + m_1) v_1^2}{m_0 v_0^2} = 1 - \frac{\eta + 1}{\eta} \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2. \quad (2)$$

Графики этих зависимостей построены на рис. 2 и 3.

Выведенные в первой части задачи формулы позволяют найти теоретический вид этих зависимостей.

Так теоретическое значение отношения скоростей следует из формулы (1) условия:

$$\left(\frac{v_1}{v_0} \right)_T = \frac{m_0}{m_0 + m_1} = \frac{\eta}{\eta + 1}. \quad (3)$$

Теоретическое значение относительных потерь энергии находится из формулы (2) условия задачи³⁴:

$$\begin{aligned} \delta_T &= \frac{m_0 v_0^2 - (m_0 + m_1) v_1^2}{m_0 v_0^2} = 1 - \frac{(m_0 + m_1)}{m_0} \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 = 1 - \frac{(m_0 + m_1)}{m_0} \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} = \frac{m_1}{m_0 + m_1} = \frac{1}{\eta + 1} \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 2, 3 построены теоретические кривые, рассчитанные по формулам (3) и (4). Видно, что экспериментальные и теоретические зависимости различаются существенно и систематически. Более того, в некоторых случаях получен абсурдный результат – потери энергии отрицательны?

³⁴ Здесь фактически приведен вывод этой формулы.

Причина подобных расхождений заключается в том, что не учтена **поправка** на отклонение нитей в положении равновесия. Эту поправку можно учесть, уменьшив величину конечного отклонения x_1 , мм на поправку $\delta x_1 \approx 13$ мм, найденную во второй части данной работы. То есть при обработке экспериментальных данных следует везде заменить x_1 на исправленное значение $\tilde{x}_1 = x_1 - \delta x_1$. Учет этой поправки приводит к хорошему соответствию, которое продемонстрировано на рис. 3,4.

Рис. 4 Зависимость отношения скоростей от отношения масс (с поправкой на начальное смещение)

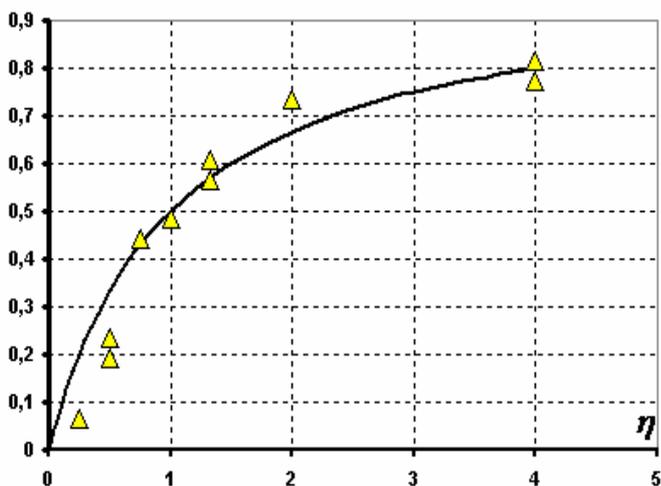
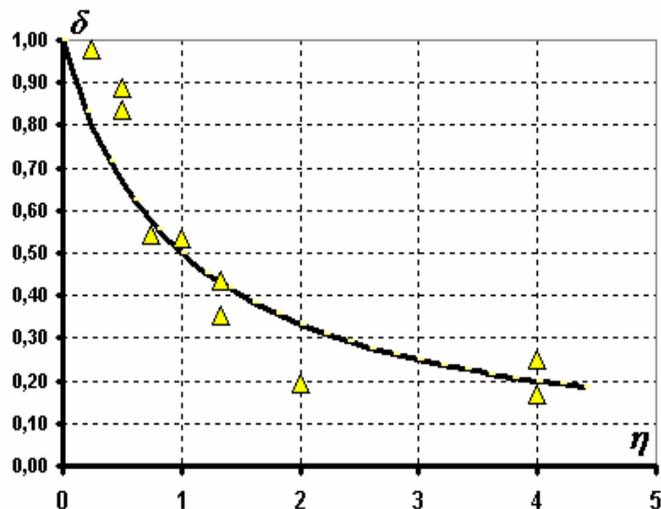


Рис. 5 Зависимость доли потерь от отношения масс (с поправки на начальное смещение)



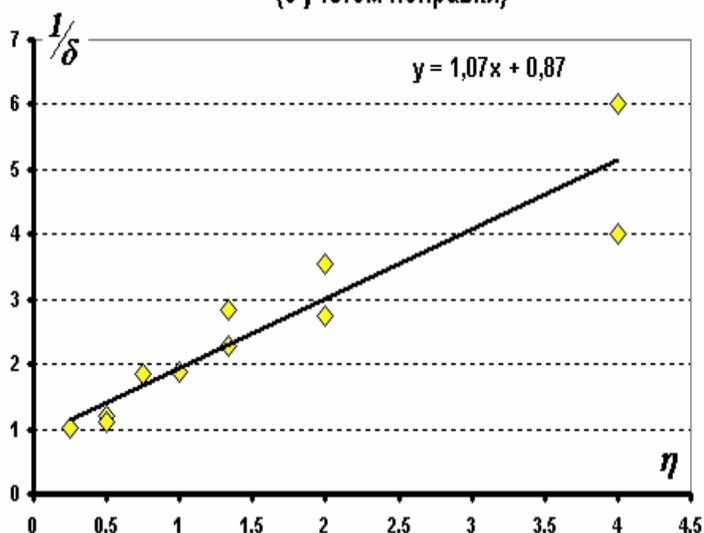
Дополнения.

1. Еще более впечатляющим и разумным способом проверки является *линеаризация* зависимости (4) посредством очевидного преобразования

$$\frac{1}{\delta} = \eta + 1.$$

На рис. 6 приведена данная зависимость (с учетом поправки) и приведено ее уравнение – очень хорошее соответствие экспериментальных данных и теоретической зависимости. Конечно, можно и эту зависимость обработать по МНК.

Линеаризованная энергетическая зависимость (с учетом поправки)



Вот уж действительно одна поправка (которая могла быть учтена при измерениях) спасла фундаментальные физические законы сохранения импульса и энергии.

3.8 Не все так просто!

Мы рассматриваем экспериментальные задачи олимпиад, а не просто отчеты о проведенной исследовательской работе. В некотором смысле, олимпиада это не только соревнование участников олимпиады между собой с целью выявления лучшего, но и соревнование разработчиков заданий с талантливыми школьниками. Авторы стремятся сделать задачу: физически корректной, выполняемой в отведенное время, красивой и оригинальной. Если задание выполнено практически полностью всеми участниками – то это плохое задание (как же тогда определить лучших?); если задание не выполнил никто – то это очень плохое задание (и в этом случае победителя определить невозможно). Часто красота задачи определяется неожиданностью, парадоксальностью результата, дающей возможность ученику проявить себя, свой характер – надо проявить силу духа³⁵, что бы не усомниться в своих результатах, а дать объяснение (хотя бы словесное), или просто честно представить их в своей работе! Это рискованно, а вдруг, в расчеты или измерения закралась элементарная ошибка. Приходится решать, решаться или «опустить крылья».

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров задач такого типа. В описании поиска подходов к их решению мы опять воспользуемся услугами молодого, но очень талантливого физика, от лица которого поведем изложение. Как известно, любимым словом участников олимпиад является «очевидно», даже в тех случаях, когда ничего очевидного нет. Поэтому это слово, мы будем выделять в рассуждениях нашего героя.



³⁵ Интересно, в каких единицах она измеряется?

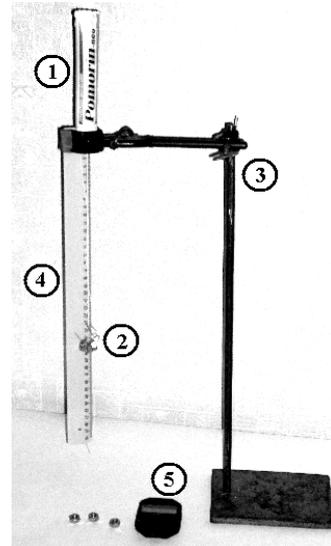


Задача 14. «Мойдодыр»

Механические свойства паст отличаются громадным разнообразием – познакомьтесь и изучите одно из этих свойств – способность оказывать сопротивление движению.

Приборы и оборудование: тюбик зубной пасты, с продетой ниткой и гайкой внутри (1); набор грузов (2), штатив (3), линейка (4), секундомер (5), весы с разновесами.

Через тюбик с пастой протянута нить, на которой закреплена металлическая гайка (она находится внутри тюбика). К нижнему концу нити можно подвешивать различные грузы, за верхний конец нити гайку можно вытягивать вверх. Если к нижнему концу нити подвесить груз достаточной массы, то он начнет медленно опускаться, протягивая гайку через пасту.



1. Измерьте законы движения подвешенных грузов для различных значений их масс. Определите, можно ли считать это движение равномерным.
2. Используя полученные данные, рассчитайте средние скорости движения грузов в каждом случае.
3. Постройте график зависимости средней скорости движения гайки внутри пасты от массы повешенных грузов. Объясните полученную зависимость.

Комментарии к условию задачи.

1. Сорт зубной пасты принципиальной роли не играет.
2. Для проведения эксперимента следует срезать заднюю часть тюбика, проделать в пробке малое отверстие, через которое пропустить нить. Для того, что бы пропустить нить через весь тюбик с пастой можно воспользоваться куском тонкой проволоки.
3. Со временем паста начинает затвердевать на воздухе, поэтому эксперимент следует проводить быстро, сразу проводя все измерения. Можно добавить в верхнюю часть тюбика немного воды.
4. Набор грузов должен давать возможность подбирать наборы от 20 до 50 г.
5. При выполнении работы исполнитель постоянно перемазывается пастой, поэтому надо дать ему несколько салфеток.

Обсуждение и решение.

На первый взгляд задача выглядит не сложной, а простой и *очевидной*. Сила вязкого трения зависит от скорости, поэтому движение гайки будет равномерным (если пропустить небольшой начальный участок разгона). Будем надеяться, что движение не слишком быстрое – поэтому будет возможным измерить закон движения. Понятно, что для увеличения точности следует измерять времена, за которые грузик проходит фиксированные расстояния – так измерять удобнее. Какая там длина тюбика? 9 сантиметров, значит можно снять 9 точек (через каждый сантиметр, меньше нельзя – лучше потом выбросить), достаточно, чтобы построить графики и убедиться, что они являются прямыми. Это является доказательством того, что движение является

равномерным (а каким еще?) Затем, по наклону прямых (или по МНК) можно будет найти скорости при каждой массе груза. Наконец, построить график зависимости скорости движения от массы грузов. Что может получиться? *Очевидно*, что сила сопротивления при движении гайки в пасте пропорциональна ее скорости (гайка ползет очень медленно), поэтому скорость должна быть пропорциональна массе груза. Ну может быть, что маловероятно, что сила пропорциональна квадрату скорости – тогда скорость должна быть пропорциональна корню квадратному из массы груза. Посмотрим.

Так, перемазался в пасту, но результаты получены и нарисованы в Таблице 1.

Таблица 1.

Путь $x, \text{см}$	Время движения для разных масс $t, \text{с}$			
	$m_1 = 23,3\text{г}$	$m_2 = 32,3\text{г}$	$m_3 = 36,8\text{г}$	$m_4 = 41,3\text{г}$
1	18,6	6,0	4,9	3,4
2	35,4	15,5	11,7	8,6
3	54,3	24,3	19,6	11,9
4	73,4	34,6	26,8	15,3
5	93,6	46,2	34,3	19,8
6	114,3	59,4	41,0	23,4
7	132,6	68,2	47,7	27,5
8	156,7	78,4	54,9	32,2
9		88,3	62,3	
Скорость $v, \frac{\text{см}}{\text{с}}$	$0,051 \pm 0,002$	$0,095 \pm 0,004$	$0,140 \pm 0,002$	$0,251 \pm 0,012$

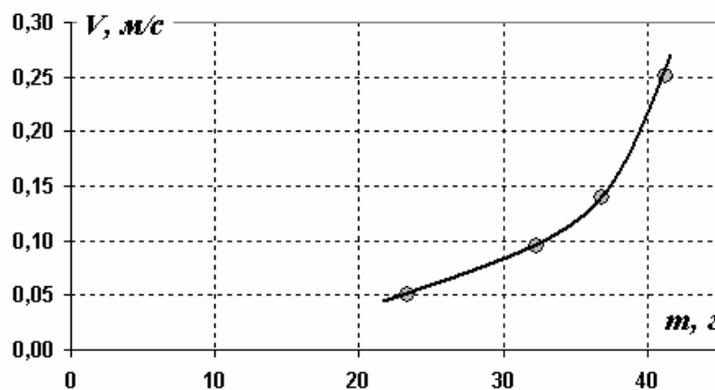
По этим данным строим графики зависимости времени движения от пройденного пути. Прекрасно, все точки почти идеально ложатся на прямые: движение, действительно, является равномерным. Не случайно, я построил зависимость времени от пути – случайная погрешность измерения времени больше, чем погрешность задания координаты. Что-то уже конец работы виден – осталось один график построить. Поэтому скорости можно подсчитать по МНК, да еще с погрешностями. Итак, представляем зависимость в виде

$$t = ax + b,$$

параметр b должен быть приблизительно равен нулю. Коэффициент a – величина обратная скорости – время, за которое тело проходит единицу пути. Поэтому скорость и ее погрешность рассчитаем по формулам

$$v = \frac{1}{a}; \quad \Delta v = v \frac{\Delta a}{a}.$$

Промежуточные арифметические выкладки можно опустить, а значения скорости добавляю в таблицу. Прекрасные результаты: погрешность – несколько процентов. Теперь график. Да, назвать эту зависимость линейной затруднительно. Но это и не корневая зависимость! А если плавно продлить кривую, то и нуль не попадешь. Действительно, не при всякой массе груза гайка начинает двигаться.



Зависимость скорости от массы груза

Так, мои предсказания не оправдались. Правы авторы, свойства пасты не обычны – это не вязкая жидкость. Искать вид зависимости по четырем точкам – работа бессмысленная, особенно, если вид зависимости не известен.

Какой же вывод? С ростом массы груза скорость гайки в пасте увеличивается. Эта скорость растет быстрее, чем при прямо пропорциональной зависимости. Возможно, что паста разжижается при увеличении давления на нее³⁶.

³⁶ Прекрасный вывод – оценивается высшим баллом. Действительно, паста – это неньютоновская жидкость, сила сопротивления которой зависит не только от скорости, но и от давления. Определить, вид зависимости также не представляется возможным. Авторы задач и ожидали, что будут честно проведены измерения, без подгонки под «очевидный» результат.



Задача 15. «Сопротивление электролита».

Известно, что растворы электролитов проводят электрический ток. Вам предлагается исследовать электрические свойства раствора поваренной соли в воде. Для этого используйте банку с раствором поваренной соли, в которую опустите два электрода. Расстояния между электродами изменяйте, переставляя их в другие отверстия. Старайтесь, чтобы во время измерений электроды располагались параллельно друг другу.

Задание 1.1. Измерьте зависимость напряжения между электродами от силы тока в растворе. Постройте график полученной зависимости. Попытайтесь объяснить полученные результаты.

Задание 1.2. Исследуйте зависимость сопротивления раствора от расстояния между электродами. Поясните, что вы понимаете под сопротивлением раствора. Постройте график полученной зависимости. Качественно объясните полученную зависимость.

Оборудование: Источник постоянного тока ЛИП-90; реостат лабораторный; вольтметр лабораторный; амперметр лабораторный; банка стеклянная с крышкой капроновой с отверстиями; два алюминиевых электрода; соединительные провода, ключ электрический.

Примечания к условию задачи.

1. В качестве электродов рекомендуется использовать куски алюминиевой проволоки без изоляции диаметром около 1 мм, длина электродов должна немного превышать высоту банки (достаточно взять полулитровую банку). К электродам следует заранее подсоединить провода.
2. В капроновой крышке необходимо просверлить в один ряд, на расстоянии 1 см друг от друга, для того, чтобы в них вставлять электроды.
3. При проведении измерений раствор необходимо время от времени заменять на свежий, так как при протекании электрического тока его электрические свойства изменяются. С этой же целью рекомендуется включать ток только на время проведения измерений, для чего цепь должна содержать ключ.

Размышления и решение.

Простенькая задачка – проверить закон Ома, какая разница через что течет ток. Внимательно, не перепутать: зависимость напряжения от силы тока³⁷ (U - вверх, I - в сторону), иначе пару баллов снимут. Должна получиться прямая, что же еще? Потом U разделить на I , получится сопротивление. Лучше конечно, подсчитать по МНК, если успею, а нет, то и по графику можно будет снять. А как изменять напряжение (или силу тока) – хорошо, дали реостат. Потом переставить электроды (и поменять раствор) и все повторить. Сколько там дырок насверлили? Шесть – значит, получим пять прямых. Для каждой надо посчитать сопротивление и построить график зависимости сопротивления от расстояния. Тоже не сложно – очевидно, что сопротивление пропорционально расстоянию («ро – эль – на эс» - песня!).

³⁷ Небось радиофизик писал, всякий нормальный физик знает, что ток зависит от напряжения, а не наоборот!

Приступим. Не забыть нарисовать схему. Собираем, подключаем, ток есть, напряжение есть, двигаем реостат – изменяется, больше ток – больше напряжение, как я и говорил. Теперь проводим измерения (подгоняем стрелку вольтметра под деление шкалы, снимаем силу тока – конечно, можно только с точностью пол деления, но я «на глазок», поточнее) результаты записываю в аккуратную табличку 1, движок реостата от одного края, до другого!

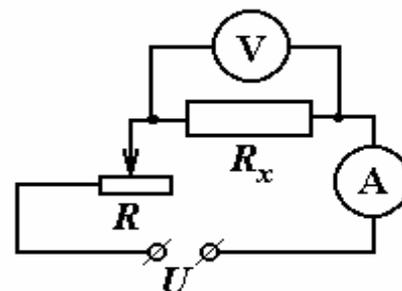
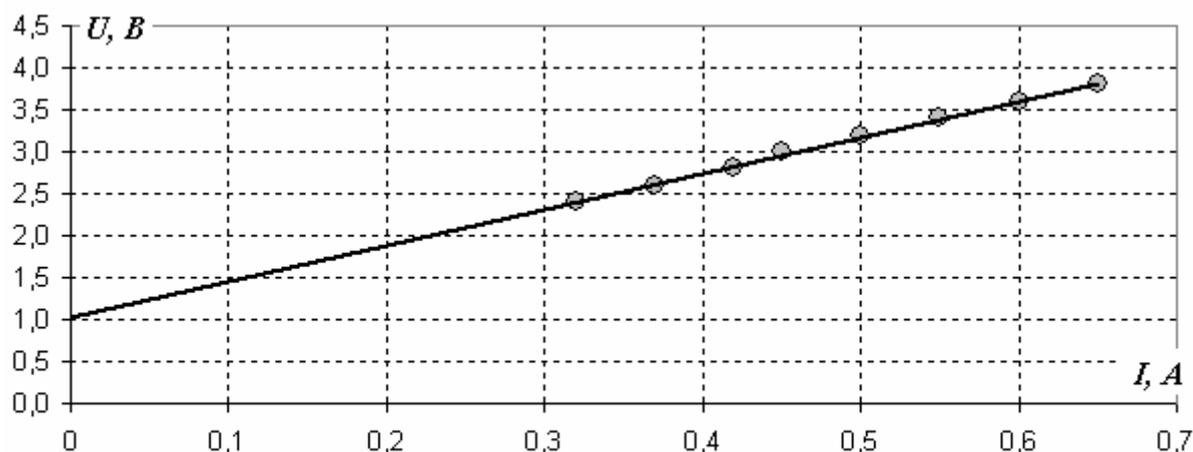


Таблица 1. Зависимость напряжения между электродами от силы тока.

$U, (B)$	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
$I, (A)$	0,32	0,37	0,42	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65

Строим график, оси координат, разметка (начну с нуля – надо же показать прямую пропорциональность), подписать оси, название графика, нанести точки, провести прямую. Стоп, почему не проходит через нуль? Проверяю: оси с нуля, значения тока и напряжения из таблицы – все верно. Плохо измерил? Проверю – еще раз включаю, смотрю – вроде все верно, конечно, сотые можно и немного другие записать, но это не принципиально! Так две точки поточнее. Изменяем ток в два раза: 0,3 ампера, напряжение – 2,4 вольта; ток 0,6 ампера, напряжение всего 3,6 вольта (а должно быть почти пять - 4,8). Поменять раствор? А что изменится? Но все-таки поменяю, все равно, для следующих измерений менять надо! Все напрасно, данные те же. Что делать? Может провести прямую через начало? Нет, как-то уж очень некрасиво получается! Этот график надо оставлять.



**Зависимость напряжения между электродами от силы тока.
(расстояние между электродами 2 см)**

Появилось две проблемы: первая - объяснить, почему не проходит через нуль; вторая – как тут считать сопротивление. Подумаем, что, значит, не проходит через нуль? Ток нет, а напряжение есть? Батарейка какая-то! А может действительно батарейка? Electrodes, electrolyte – galvanic element! I will try to measure voltage directly, without current. I disconnect – voltage is zero! Where does it come from – electrodes are identical, where plus, where minus? And when current flows, plus and minus – but then the electrodes become different. It may be. So we write: «при

пропускании тока банка становится похожей на гальванический элемент, поэтому появляется дополнительная ЭДС» - другого объяснения не вижу³⁸.

Теперь о сопротивлении – не случайно этот вопрос поставлен в условии! Если просто делить напряжение на силу тока, то результат будет различным для разных экспериментальных значений тока и напряжения. Так делать нельзя. А как? Если есть дополнительное напряжение, то его надо вычесть! Отнять один вольт, можно! А лучше взять отношение изменения напряжения к изменению силы тока

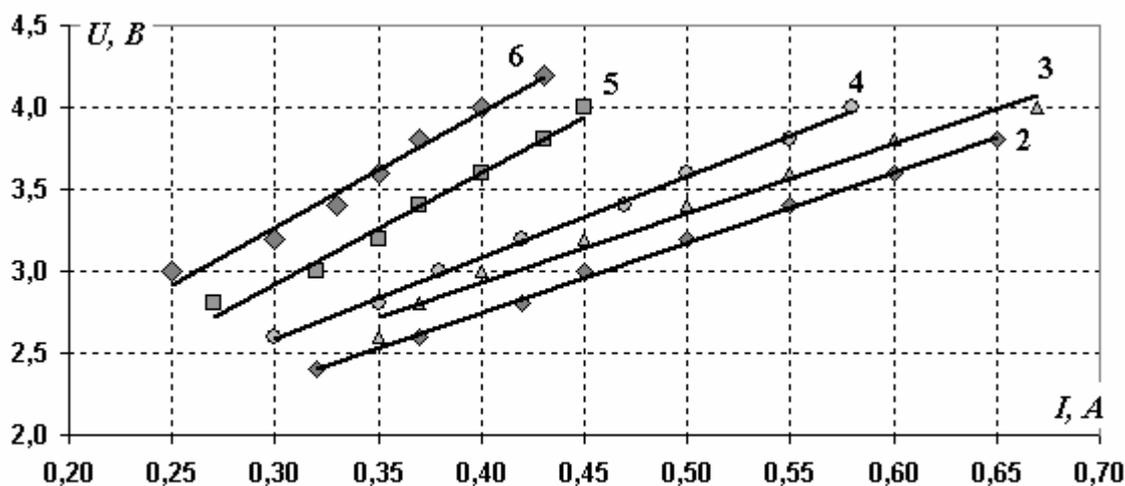
$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

оно то будет постоянным. Но это же коэффициент наклона. Значит, лучше воспользоваться МНК, тогда еще и дополнительное напряжение (или ЭДС) получу. Ладно, проведу измерения для остальных значений расстояния между электродами, а потом все обработаю. Табличку, измерения, результаты!

Таблица 2. Зависимость напряжения между электродами от силы тока, при различных расстояниях r между электродами.

$\frac{U, (В)}{r, (см)}$	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2
3	0,35	0,37	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,67	-
4	0,30	0,35	0,38	0,42	0,47	0,50	0,55	0,58	-
5	-	0,27	0,32	0,35	0,37	0,40	0,43	0,45	-
6	-	-	0,25	0,30	0,33	0,35	0,37	0,40	0,43

Диапазон изменения сопротивления реостата – полный, а изменение напряжения зависит от расстояния. Понятно, сопротивление изменяется. Теперь графики. Здесь можно оси начинать не с нуля, через него прямые не проходят. Разметка, подписи, точки, прямые. Ну не совсем точно ложатся на прямые – а что они хотят с такими приборами? Готово, подписать прямые: укажу значения расстояния.



Зависимость напряжения между электродами от силы тока (при различных расстояниях между электродами)

³⁸ И он оказался прав: при пропускании электрического тока через раствор электролита вблизи электродов собираются ионы разных знаков, этот эффект называется поляризацией электродов – благодаря этому и возникает дополнительная ЭДС. Ученик не обязан знать об этом явлении, но выдвинуть идею об этом обязан. Объяснение, приведенное нашим «молодым, но талантливым», достаточно для того, чтобы получить за него высший балл.

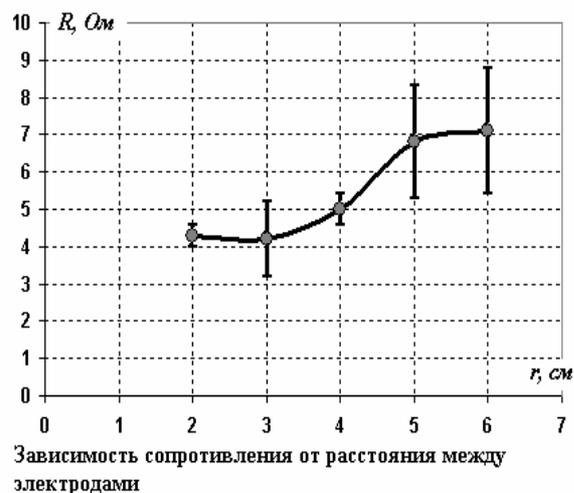
Что же получилось? Наклон изменяется, но прямые 2 и 3 почти параллельны. По графику сопротивления не очень то и снимешь: где-то в районе 4-6 Ом. Надо считать по МНК. И так, напряжение между электродами зависит от силы тока по закону:

$$U = RI + U_0.$$

Параметры линейной зависимости между U и I равны коэффициенту наклона - R сопротивление, свободный член U_0 - дополнительное напряжение (или ЭДС). Считаю - нужна еще одна Таблица 3. (Расчеты в черновике). И график - с погрешностями.

Таблица 3. Параметры линейных зависимостей между напряжением и силой тока при разных значениях расстояния между электродами.

$r, \text{см}$	$R, \text{Ом}$	$\Delta R, \text{Ом}$	$U_0, \text{В}$	$\Delta U_0, \text{В}$
2,0	4,3	0,3	1,0	0,2
3,0	4,2	1,0	1,2	0,5
4,0	5	0,4	1,1	0,2
5,0	6,8	1,5	0,9	0,6
6,0	7,1	1,7	1,2	0,6



Что радует - U_0 для всех прямых примерно одинаково (как это пишут - в пределах погрешности) - точно батарейка!

Сопротивление между электродами возрастает с ростом расстояния между ними, но не пропорционально этому расстоянию, а почему это должно быть пропорционально - между электродами не кусок провода! Отсутствие пропорциональности связано с тем, что происходит сложное растекание тока между электродами. Объяснить полученную зависимость сложно: теоретически необходимо искать распределение токов; экспериментально - не хватает данных, и те не точны³⁹.

³⁹ И здесь он прав - в авторском решении сказано: большие погрешности результатов измерения сопротивления не позволяют установить вид зависимости.



Задача 16. «Закон Фурье».

Приборы и оборудование :

Сосуд для воды, 2 термометра, штатив с двумя лапками, стаканчики пластмассовые 2 штуки, секундомер, мензурка, горячая и холодная вода.

Процесс передачи теплоты через перегородку подчиняется закону Фурье: плотность потока теплоты q (количество теплоты, протекающее через площадку единичной площади в единицу времени) пропорциональна разности температур и обратно пропорционален толщине перегородки h

$$q = k \frac{\Delta T}{h}, \quad (1)$$

где k - коэффициент теплопроводности материала перегородки.

Вам предстоит изучить процесс передачи теплоты от горячей воды (находящейся в сосуде) через пластмассовый стаканчик к холодной воде, находящейся в этом же стаканчике. Из закона Фурье следует, что поток теплоты $\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}$ (количество теплоты перетекающей от одного тела к другому за единицу времени⁴⁰) пропорционален разности температур

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = K \Delta T. \quad (2)$$

в этой формуле коэффициент K - называется коэффициентом теплопередачи. Этот коэффициент зависит от материала перегородки, ее толщины, площади и т.д.

Ваша задача проверить выполнимость закона Фурье (точнее следствие из него – формулу (2)) и определить коэффициент теплопередачи для одноразового пластмассового стаканчика.

Поместите стаканчик в банке (большом сосуде). Укрепите один термометр в штативе и опустите его измерительную часть в стаканчик, так чтобы она не касалась ни его дна, ни его стенок. Второй термометр поместите в банку. Во всех экспериментах заливайте в стаканчик 150 г холодной воды, в банку заливайте горячую воду. Уровни воды в банке и стаканчике должны совпадать.

Все измерения проведите для одного стаканчика и для «двойного стаканчика», (двух стаканчиков, вставленных «один в один»).

Несколько советов:

Рекомендуем начинать измерения с «двойного» стаканчика – они выполняются проще.

Не стремитесь заливать слишком горячую воду – температура будет изменяться слишком быстро, поэтому точно измерять крайне сложно. А еще - сильно горячая воды «жжется»!

Точность секундомера выше точности термометров – подумайте, как рационально использовать этот научный факт.

⁴⁰ Будем обозначать время символом τ , чтобы не путать с температурами, за которыми оставим обозначение t .

В течение отводимых на выполнение этой задачи 2,5 часов измерения можно провести неоднократно.

$$\text{Удельная теплоемкость воды } C = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Наконец, задания:

1. Измерьте зависимости температуры воды в стаканчике (напоминаем, один раз одинарный, второй раз двойной) и банке от времени.
2. Постройте графики полученных зависимостей.
3. На основании полученных данных проверьте справедливость закона Фурье в данных случаях.
4. Определите коэффициенты теплопередачи для одинарного и «двойного» стаканчиков.
5. Сравните полученные значения коэффициентов теплопередачи. Дайте объяснение полученных результатов.

Комментарии к условию задачи.

1. Для проведения измерений удобно использовать одноразовые пластиковые стаканчики. Сосуд для горячей воды должен иметь широкое горлышко, чтобы в него помещался стакан и термометр. Нами использовался небольшой глиняный горшок. Стакан следует закрепить в лапке штатива. Во второй лапке штатива следует закрепить термометр.
2. Два термометра в данной работе необходимы, так как требуется одновременно измерять температуры остывающей горячей воды в сосуде и нагреваемой воды в стакане. Следует стремиться к тому, чтобы измерительные части термометров находились внутри воды не слишком близко к стенкам.

Обсуждение и решение.

Условие задачи понятно и не блещет оригинальностью: при погружении стаканчика с холодной водой в горячую воду, холодная вода начнет нагреваться. Какая-то часть теплоты от горячей воды будет уходить в окружающую среду. Скорее всего, что потерями теплоты от воды в стаканчике можно пренебречь, так как, во-первых, он полностью погружен в горячую воду (теплопередачи со стенок нет); во-вторых, температура воды в нем не будет слишком большой. Кроме того, температура воды в стаканчике будет изменяться в больших пределах (воды в нем меньше, чем в горшочке). Все это намекает на то, что надо наиболее тщательно измерять именно температуру воды в стаканчике. Следующее обычное правило: секундомер точнее термометра, поэтому буду измерять времена, когда столбик термометра будет достигать определенного значения (фиксируем температуру – измеряем время). Кстати, какая там цена деления? Два градуса, значит и будем измерять через два градуса.

Итак, вырисовывается следующая процедура измерения зависимости температуры от времени:

- собираю установку;
- заливаю воду (не перепутать: горячую в горшок, холодную в стакан);
- дожидаюсь момента времени, когда температура холодной воды достигла некоторой фиксируемой по риску термометра температуры $t_{\text{хол.0}}$; пускаю секундомер и одновременно замеряю температуру горячей воды $t_{\text{гор.0}}$ (она должна изменяться гораздо медленнее и в меньших пределах);

- жду, когда столбик термометра в стакане достигнет очередной риски $t_{хол.k}$, и измеряю времени τ_k , в этот же момент измеряю температуру горячей воды $t_{гор.k}$ (смотрю на холодный термометр, потом быстро на секундомер, а затем на холодный термометр: два числа можно запомнить; пока вода нагреется до следующей риски, успею записать);

- продолжаю измерения до тех пор, пока разность температур не станет малой (два – три градуса).

Так, с измерениями разобрался. Теперь, что делать с результатами? Читаю еще раз задание: построить графики – не проблема. Проверить закон Фурье! Знать бы, что это такое! Ладно, формула (2) есть, опять пожалели бедного школьника, а могли бы и производную нарисовать. Внимательно разбираюсь с формулой: ΔQ - количество перетекающей теплоты, надо понимать: от горячей к холодной за время $\Delta\tau$, пропорционально разности температур ΔT , Каких? Горячей и холодной воды. Логично! И еще коэффициент (надо полагать постоянный), который надо будет определить. Значит, для проверки закона надо знать три «дельты». А что я получу в эксперименте (если получу): набор времен τ_k и температуры в эти моменты времени: горячей $t_{гор.k}$ и холодной $t_{хол.k}$. Теперь «дельты» надо выразить через эти результаты:

- проще всего с интервалом времени $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ (эти интервалы будут разными);

- количество переданной теплоты пойдет на нагревание холодной воды (про потери пока забудем) на $\delta t = t_{хол.k} - t_{хол.k-1}$ градусов (эта величина фиксирована и равна $\delta t = 2^\circ\text{C}$), поэтому количество полученной теплоты можно посчитать, как учили: $\Delta Q_k = cm\delta t$. Удельная теплоемкость воды задана, масса воды задана – считается! Теперь можно будет посчитать и поток теплоты (надо точнее выразиться – средний поток):

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}\right)_k = \frac{cm\delta t}{\tau_k - \tau_{k-1}}. \quad (1)$$

Такая важная формула, что надо ее занумеровать – да, считать придется долго! Нет, числитель то постоянный – раз подсчитал и записал (а еще лучше на cm в самом конце домножить, по ходу буду считать, что теплота это разность температур – такая у меня система единиц!). Поэтому два разделил на разность времен (можно в уме) и получил поток – просто! С левой частью разобрался. Теперь разность температур – но они же изменяются, какие брать в начале промежутка, или в его конце?

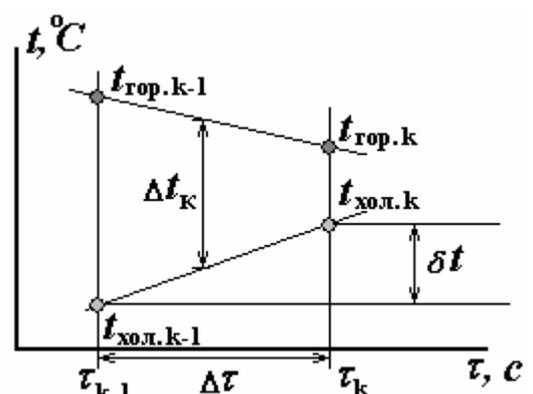
Конечно, лучше среднюю по этому интервалу (тоже можно в уме посчитать):

$$\Delta t_k = \frac{(t_{гор.k} + t_{гор.k-1}) - (t_{хол.k} + t_{хол.k-1})}{2}. \quad (2)$$

Ну вот и все: все переменные в уравнении определяются по результатам измерений. Красиво, надо даже нарисовать, что бы проверяющий понял.

Дальше построил график зависимости потока от разности температур, получил прямую, нашел ее наклон по МНК и получил коэффициент теплопередачи. Вывод даже сейчас могу написать:

«так как график прямая линия, то закон Фурье выполняется». Все аналогично для одного стаканчика: измерения, таблица, график, расчеты, еще один график, коэффициент наклона, получите: «для одинарного стаканчика коэффициент теплопередачи в два раза меньше, чем для двойного!». Наоборот, в два раза больше – он же тоньше.



Все – можно измерять. Результаты измерений зависимости температур холодной и горячей воды от времени представлены в таблице 1. Для результатов расчетов – еще две колонки (поток теплоты по формуле (1) без теплоемкости), средняя разность температур по формуле (2) – для их расчетов нужны две строчки, поэтому первая в таблице будет пустой.

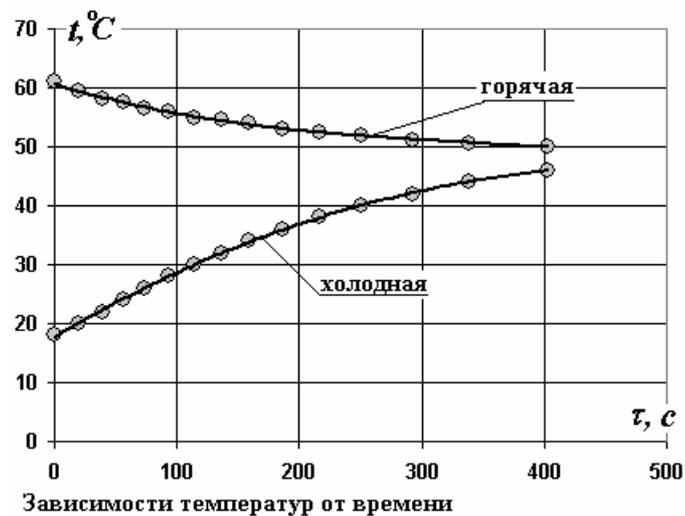
Таблица 1.

τ_k, c	$t_{хол.к}, ^\circ C$	$t_{гор.к}, ^\circ C$	$\frac{\delta t}{\Delta \tau}$	$\Delta t_{ср.}, ^\circ C$
0	18,0	61,0		
20	20,0	59,5	0,100	41,3
39	22,0	58,0	0,105	37,8
56	24,0	57,5	0,118	34,8
74	26,0	56,5	0,111	32,0
93	28,0	56,0	0,105	29,3
114	30,0	55,0	0,095	26,5
136	32,0	54,5	0,091	23,8
159	34,0	54,0	0,087	21,3
186	36,0	53,0	0,074	18,5
216	38,0	52,5	0,067	15,8
250	40,0	52,0	0,059	13,3
292	42,0	51,0	0,048	10,5
338	44,0	50,5	0,043	7,8
403	46,0	50,0	0,031	5,3

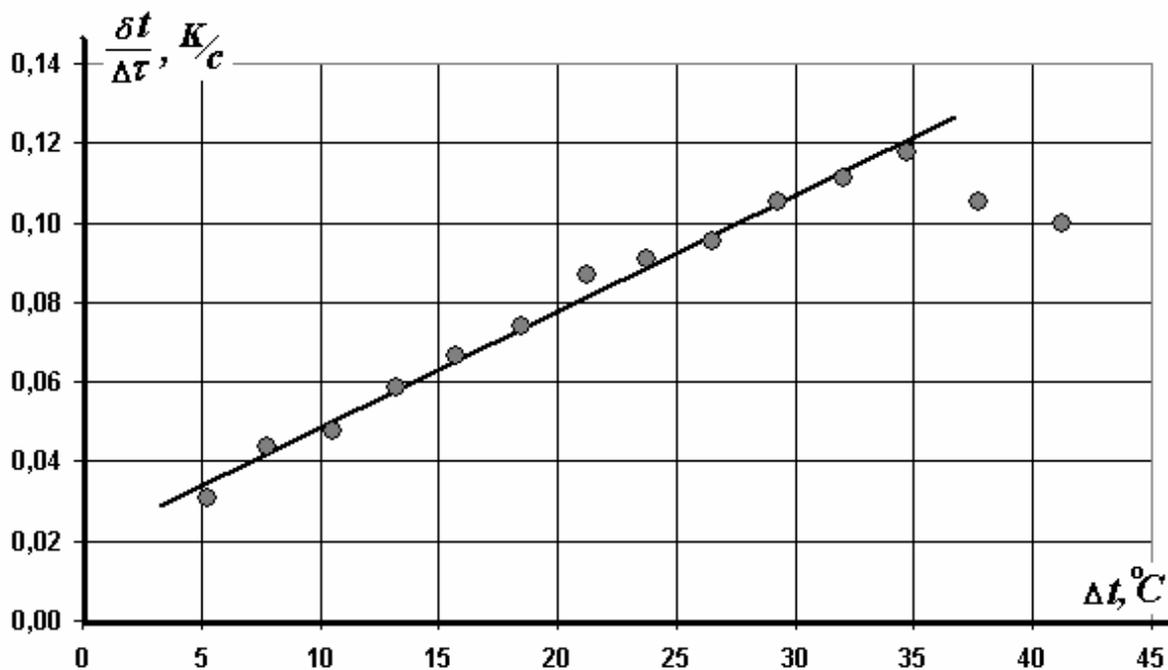
Теперь нарисую график (для дальнейшего не нужный – опять проверяют, как умеем графики строить). Но, красиво (особенно, если сглаживающую кривую нарисовать) – гладкие монотонные зависимости. Полностью ожидаемые: холодная вода нагревается быстрее, чем остывает горячая. Диапазоны изменения также разумны – холодная нагревается на 30 градусов, горячая остывает на 10, но ее примерно в три раза больше.

Так, что можно ожидать хорошего основного графика – зависимости потока теплоты от разности температур.

Рассчитываю, строю ... Да, не очень. Особенно хвост какой-то из последних двух точек. Правда, это первые точки (по измерениям) – плохо измерял? Возможно, там и температуры изменялись быстрее, еле успевал записывать. Возможна и другая, физическая причина. Эти измерения проводил непосредственно после того, как залил воду – не установился еще тепловой режим⁴¹: конвекция, перераспределение температур и т.д. и т.п.



⁴¹ Надо согласиться, вполне возможные причины, только можно было бы, и назвать какой режим не установился – квазистационарный.



Зависимость потока теплоты от разности температур

Ладно – эти точки при расчетах отбросим, остальные то легли примерно на прямую. Нарисуем ее. Еще одна проблема: она не проходит через нуль. Может быть, погрешности измерений повлияли? Надо рассчитывать параметры линейной зависимости $y = ax + b$

($x = \Delta t$ - разность температур горячей и холодной воды, $y = \frac{\delta t}{\Delta \tau}$ - поток теплоты),

конечно, по МНК:

$$a = (2,83 \pm 0,17) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}; \quad b = (2,15 \pm 0,40) \cdot 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{c}}$$

Сравним с графиком: похоже на правду и наклон, и отсечение на оси. Правдоподобно? А с чем сравнивать? Какой смысл имеет параметр a ? Размерность обратная времени, значит,

$\frac{1}{a}$ какое-то время. Смотрим на формулу (пока без этого ненулевого b): $\frac{1}{a} = \frac{\Delta \tau}{\delta t \cdot \Delta t}$ - ясно,

время нагревания холодной воды на 1 градус при разности температур тоже 1 градус. И сколько же это получается $\frac{1}{a} \approx 360 \text{ c}$ - немало (6 минут). Но у меня разность температур

гораздо выше: возьмем 20° - время нагревания на 1 градус в двадцать раз меньше: получаем – 18 секунд. А по моим данным от 34° до 36° нагрелась примерно за тридцать секунд: по порядку величины сходится – грубой ошибки в расчетах нет. Ну, и конечно, погрешность этого коэффициента (около 7%) тоже может свою роль сыграть.

Разберемся с b . Что это такое? Жаль, что не нуль! Какой смысл этого: разность температур нуль, а поток теплоты идет!? Интересно, в какую сторону, по инерции, что ли? Формально, при какой разности температур поток станет равным нулю?

$(\Delta t)_{q=0} = -\frac{b}{a} \approx -8^\circ$. Невероятно, может я на столько ошибся при расчете разностей

температур? Не может быть! Точно объяснить не могу, причин много: погрешности измерений (одна погрешность b около 20%); точнее надо было находить среднюю разность; да и метод расчета, честно скажем, не очень хорош: опять приходится считать разности. Оставлю, как есть, без комментариев. Все-таки коэффициент теплопередачи найден с неплохой точностью. Кстати, чуть не забыл. Найти значение этого коэффициента: надо умножить a на теплоемкость воды в стакане:

$$K = cma = 1,78 \frac{Bm}{K}; \quad \Delta K = cm\Delta a = 0,11 \frac{Bm}{K}.$$

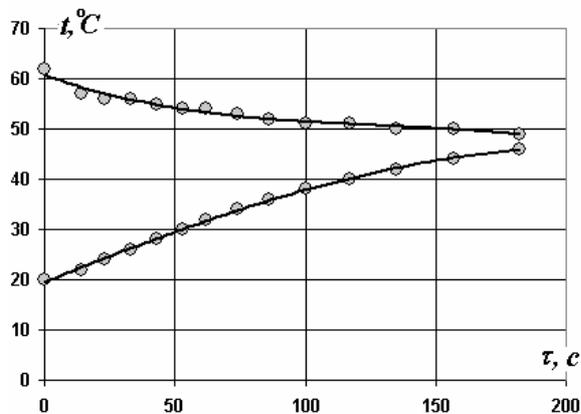
Относительная погрешность 6%. Неплохо, для таких приборов!

Теперь все то же для одного стаканчика. Измеряю, результаты в таблицу 2.

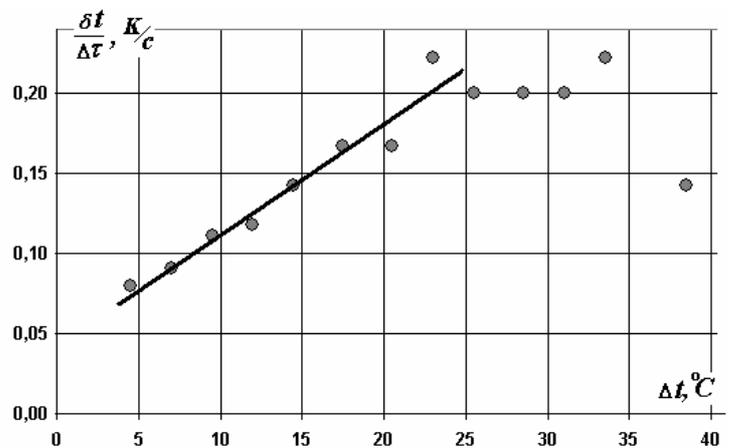
Таблица 2.

τ_k, c	$t_{хол.k}, ^\circ C$	$t_{гор.k}, ^\circ C$	$\frac{\delta t}{\Delta \tau}$	$\Delta t_{cp}, ^\circ C$
0	20,0	62,0		
14	22,0	57,0	0,143	38,5
23	24,0	56,0	0,222	33,5
33	26,0	56,0	0,200	31,0
43	28,0	55,0	0,200	28,5
53	30,0	54,0	0,200	25,5
62	32,0	54,0	0,222	23,0
74	34,0	53,0	0,167	20,5
86	36,0	52,0	0,167	17,5
100	38,0	51,0	0,143	14,5
117	40,0	51,0	0,118	12,0
135	42,0	50,0	0,111	9,5
157	44,0	50,0	0,091	7,0
182	46,0	49,0	0,080	4,5

Рассчитываю потоки теплоты и средние разности и туда же в таблицу. Теперь два графика, для одного стаканчика.



Зависимости температур от времени



Зависимость потока теплоты от разности температур

Еще хуже – не зря рекомендовано сначала провести измерения для двойного, там и измерять было легче (медленнее нагревался) и результаты приличнее. Что сейчас делать? Семь первых точек надо отбрасывать! Кстати, по времени, почти, как и в первой серии – первую минуту можно не измерять. Ничего не поделаешь. Осталось 6 точек, по ним провожу прямую и рассчитываю параметры линейной зависимости:

$$a = (6,64 \pm 0,97) \cdot 10^{-3} c^{-1}; \quad b = (4,6 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \frac{K}{c}.$$

Погрешности под 20% - и точек меньше, и пляшут больше. Все те же проблемы с параметром b . По этим данным поток должен прекратиться при разности температур

$(\Delta t)_{q=0} = -\frac{b}{a} \approx -7^\circ$. Интересно, что почти такое же значение. Но это секретные данные.

Не забыть: коэффициент теплопередачи

$$K = cma = 4,18 \frac{Bm}{K}; \quad \Delta K = cm\Delta a = 0,61 \frac{Bm}{K}.$$

Но этот коэффициент больше чем в два раза превышает коэффициент теплопередачи для двойного стакана! А может все в пределах погрешности? Найду их отношение:

$$\frac{K_1}{K_2} \approx 2,3 \text{ и ее погрешность } \Delta \left(\frac{K_1}{K_2} \right) = \frac{K_1}{K_2} \sqrt{\left(\frac{\Delta K_1}{K_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta K_2}{K_2} \right)^2} \approx 0,4. \text{ Можно считать, что в}$$

два раза (в пределах погрешности).

Осталось сделать выводы:

- Закон Фурье выполняется;
- значения коэффициентов теплопередачи равны

$$K_1 = (4,2 \pm 0,6) \frac{Bm}{K};$$

$$K_2 = (1,8 \pm 0,1) \frac{Bm}{K};$$

и отличаются примерно в два раза, хотя, возможно, что большее уменьшение этого коэффициента для двойного стаканчика объясняется неплотным прилеганием стенок стаканов друг к другу и наличием малой прослойки воздуха между ними.

Вот выдал, а что? Рамы оконные тоже двойными делают!

А все-таки интересно, в два раза уменьшается теплопередача или больше? При такой точности измерений ответить точно нельзя. Все дало в методе – вечные проблемы с этими разностями! Можно ли результаты обрабатывать по-другому, не считая отношения разностей. Это же фактически я так производную рассчитывал. Недавно читал, что операция численного дифференцирования незаконна (точнее, не корректна). Как бы экспериментальную кривую, без пересчета, обрабатывать? Надо будет обдумать дома. Но не сегодня – устал. И не завтра – надо же будет за дипломом с медалью идти!

Дополнение к задаче. Домашняя работа⁴².

Вот я и дома, теперь загоню свои данные в Excel – смогу этих графиков настроить, этих коэффициентов насчитать по МНК – сколько душе угодно. Важно только сообразить, что считать, что строить – этого мне никакой компьютер не подскажет. Начну с результатов по двойному стаканчику: точек больше,

Итак, основная идея – целиком обрабатывать экспериментальные графики. Что мне необходимо сделать? Проверить выполнение закона Фурье, раз; найти коэффициенты теплопередачи, два! Что я делал? – анализировал поток, как функцию разности температур, на основании зависимости температуры (двух температур) от времени. Значит, надо от потока перейти к температуре. А что такое уравнение закона Фурье, как не связь между скоростью изменения температуры с температурой: как в механике, известна зависимость скорости от координаты, надо найти зависимость координаты от времени! Эта же задача решается! Конечно, я анализировал производную, а надо анализировать саму функцию, но тогда надо знать ее вид! Эх, если бы я знал вид этой функции, я бы и на олимпиаде ее проверял и искал ее параметры! Жаль, не умею я решать такие уравнения. А если подумать? Производная пропорциональна самой функции. Где-то я уже такое встречал, и не раз: разрядка конденсатора – сила тока (производная от заряда) пропорциональна заряду; торможение тела в вязкой жидкости – ускорение (производная

⁴² В очередной раз восхитимся нашим учеником – действительно, у него появилась блестящая идея исследовать не производную от экспериментальной функции, а саму функцию. Посмотрим, что у него получится!

от скорости) пропорциональная скорости. Здесь то же самое: скорость изменения температуры линейно зависит от температуры. Ура, решение будет экспонентой

$$t = A \exp(-a\tau), \quad (1)$$

с параметрами разберусь потом. Надо логарифмировать. То есть логарифм температуры должен линейно зависеть от времени:

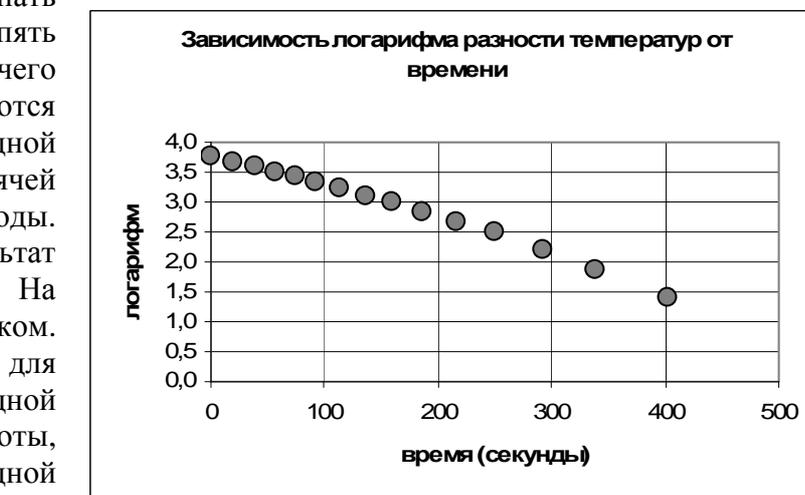
$$\ln t = \ln A - a\tau.$$

Проверить элементарно – времена есть, температуры есть, строим.

Столбец для логарифма $\ln t_{хол.k}$, столбец для логарифма $\ln t_{гор.k}$, мастер диаграмм,

готово. И это прямые? Нет, конечно! Проверяю – можно пару точек и «вручную» проверить, что я глупее Excel'я? Все правильно. Может, потери теплоты в воздух виноваты? Но в моем решении они не проявились, или я не заметил? За что же тогда медаль дали? Что-то я напутал. Посмотрю еще раз на свою функцию (1). Конечно, кто такое придумал? Разве температура должна стремиться к нулю, как эта функция? Нет, функция должна быть другой. Что у нас должно стремиться к нулю – **разность температур**. Похоже, что разность температур надо логарифмировать (а логарифм разности не равен разности логарифмов!). Попробую: еще один столбец для разности температур $(t_{гор.k} - t_{хол.k})$ (и не надо никаких средних), еще один столбец для логарифма разности $\ln(t_{гор.k} - t_{хол.k})$ и на график: Здорово, конечно не идеальная прямая, но очень близко, особенно если несколько первых точек отбросить! Я на верном пути. Что с

этим графиком делать? Нужно знать эту функцию. И еще – опять разности (правда, большие – ничего страшного!), но используются значения температур и холодной (измерены хорошо), и горячей (измерены не очень хорошо) воды. Вот если бы получить результат только по «холодной» воде. На время на стать теоретиком. Попробую. Запишу уравнение для изменения температуры холодной воды (количество теплоты, пошедшей на нагревание холодной воды, равно количеству теплоты, полученной от горячей):



этим графиком делать? Нужно знать эту функцию. И еще – опять разности (правда, большие – ничего страшного!), но используются значения температур и холодной (измерены хорошо), и горячей (измерены не очень хорошо) воды. Вот если бы получить результат только по «холодной» воде. На время на стать теоретиком. Попробую. Запишу уравнение для изменения температуры холодной воды (количество теплоты, пошедшей на нагревание холодной воды, равно количеству теплоты, полученной от горячей):

$$C_1 \Delta t_1 = K(t_2 - t_1) \Delta \tau, \quad (2)$$

все, что относится к холодной пойдет с индексом 1 t_1 - температура (зависит от времени); C_1 - теплоемкость (полная, а не удельная); все, что относится к горячей - с индексом 2. Хорошее уравнение, только решить его нельзя – две неизвестных (температура горячей тоже изменяется). Надо записать такое же уравнение для горячей (только она отдает теплоту)

$$C_2 \Delta t_2 = -K(t_2 - t_1) \Delta \tau. \quad (3)$$

Уравнений два, неизвестных две, но как их найти? Справа в обоих уравнениях разность температур, надо сделать ту же разность

$$\begin{cases} C_1 \Delta t_1 = K(t_2 - t_1) \Delta \tau \\ C_2 \Delta t_2 = -K(t_2 - t_1) \Delta \tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta t_1 = \frac{K}{C_1} (t_2 - t_1) \Delta \tau \\ \Delta t_2 = -\frac{K}{C_2} (t_2 - t_1) \Delta \tau \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta(t_2 - t_1)}{\Delta \tau} = -K \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) (t_2 - t_1)$$

А вот это уже совсем знакомо: постоянный коэффициент при разности и есть показатель экспоненты.

Обозначу его, как и раньше:

$$a = K \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

Как его находить по экспериментальным данным известно: это коэффициент наклона графика в полулогарифмическом масштабе. Даже если я его найду, то чтобы найти коэффициент теплопередачи надо знать теплоемкости. Теплоемкость холодной воды известна: $C_1 = cm$, а для горячей? Измерить объем горячей воды? А теплоемкость горшка, наверное, не маленькая. Надо тоже рассчитывать по экспериментальным данным. Не сложно – знаю изменение температуры холодной, знаю изменение температуры горячей – легко найти отношение теплоемкостей, да, именно отношение! Еще одно обозначение:

$\frac{C_1}{C_2} = \eta$, тогда показатель экспоненты имеет вид:

$$a = \frac{K}{C_1} (1 + \eta). \quad (4)$$

Теперь «теоретическая» модель построена: разность температур горячей и холодной воды зависит от времени по закону:

$$(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)_0 \exp(-a\tau), \quad (5)$$

где $(t_2 - t_1)_0$ - начальная разность температур, которую мне знать и необязательно, в логарифмическом масштабе она уйдет в свободный член. Ну и хорошо, мне же надо будет отбрасывать плохо измеренные начальные точки!

А как же зависят от времени сами температуры? Должны содержать такие же экспоненты - иначе их разность не будет иметь вид (5). А что будет стоять перед экспонентами: тоже должна быть какая-то разность, причем, стремящаяся к нулю. Ну конечно, отклонение от конечной (стационарной) температуры, которую обозначу θ . Как это я сразу не догадался: всегда по экспоненте убывает отклонение от стационарного значения: и заряд при зарядке конденсатора, и скорость лодки при разгоне! Поэтому температуры воды должны зависеть от времени по законам

$$(\theta - t_1) = (\theta - t_1)_0 \exp(-a\tau), \quad (6)$$

$$(t_2 - \theta) = (t_2 - \theta)_0 \exp(-a\tau). \quad (7)$$

Оказывается, теоретиком быть не сложно, если думать, как физик, а не как математик!

Теперь у меня есть целы три способа определения показателя экспоненты (а через него и коэффициента теплопередачи): «по холодной воде», «по горячей воде», по разности температур! Интересно, а совпадут ли эти показатели? Хорошо бы! Теперь последнее: а как мне построить зависимости (6)-(7) в логарифмическом масштабе, если неизвестна конечная температура? Просто логарифмировать температуры я уже пробовал, теперь понятно, почему ничего хорошего не получилось! Надо искать поточнее конечную температуру и, чуть не забыл, отношение теплоемкостей. Все эти величины входят в уравнение теплового баланса, надо его записать:

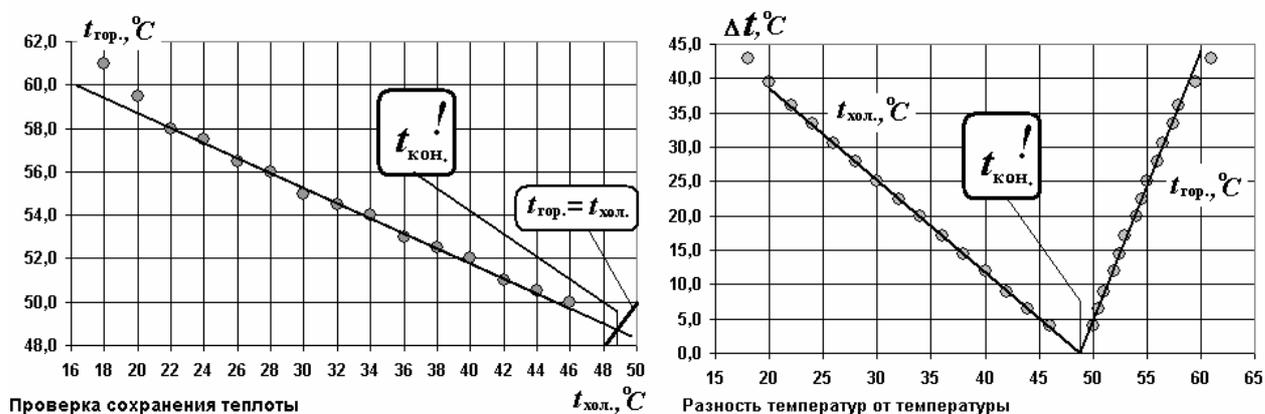
$$C_1(\theta - t_1) = C_2(t_2 - \theta),$$

а если использовать отношение теплоемкостей $\frac{C_1}{C_2} = \eta$, то еще проще

$$\eta(\theta - t_1) = (t_2 - \theta). \quad (8)$$

Так оно же линейное: строй зависимость t_1 от t_2 , получай прямую (если получится!), обрабатывай ее по МНК (тогда лучше t_2 от t_1 , температура холодной измерена точнее) и находи, что тебе надо: два параметра линейной зависимости, две неизвестных. Еще одна мысль: использовать разность температур $\Delta t = (t_2 - t_1)$, построить ее зависимость от t_1 (или от t_2), и смотри при какой температуре разность станет равной нулю! А эти зависимости тоже должны быть линейными. Какой способ лучше; наверно, разность как функция температуры холодной (она точнее!). Хотя лучше попробовать все три способа и сравнить. Последнее теоретическое усилие: привести все три зависимости к явному линейному виду, выразить параметры зависимостей через конечную температуру и отношение теплоемкости, наконец, выразить неизвестные (и их погрешности, иначе как сравнивать) через параметры линейных зависимостей – с этим даже экспериментатор справится. Прделаю эту работу в табличке (я же все-таки больше экспериментатор, а какой экспериментатор без таблицы). Ну вот и готово: Таблица 1.

Теперь можно построить графики:



Здорово и красиво! Если бы потери теплоты были существенны, то прямые бы не получились. А хорошо видно, что в начале точки явно отходят от прямой – то ли плохо измерял, то ли, действительно, заметно нагревание воздуха. Поэтому первый график можно назвать проверка закона сохранения теплоты. Вывод: почти сохраняется! По второму графику сразу можно определить конечную температуру: продолжаю прямые до пресечения с осью и получаю значение конечной температуры (когда разность равна нулю) – странно, совпадает! А на первом графике надо провести прямую с уравнением $t_2 = t_1$ (в самом уголке поместилась) и найти точку ее пересечения с построенной прямой – то же приблизительно 49° . Действительно здорово, первые точки отбросил, а конечную температуру нашел по усреднению всех остальных точек. Имеет смысл повозиться с методом наименьших квадратов для всех прямых. Считаю, результаты в таблицу 2.