

Комментарии к условию.

1. Гидростатическое взвешивание со времен Архимеда является одной из самых популярных тем физических олимпиад.

2. Задача допускает множество вариантов решения и последовательностей измерения. Предпочтение надо отдавать тем методам, в которых проводится измерения наименьшего числа величин.

3. Кусок пластилина не должен быть слишком малым, чтобы измерение его объема с помощью мерного стакана было достаточно точным.

4. В качестве усложнения условия линейку можно заменить неоднородным стержнем, а в качестве измерительного инструмента предложить использовать миллиметровую бумагу.

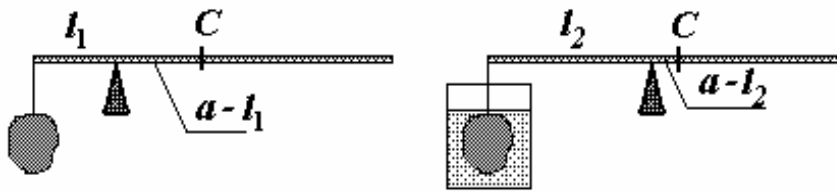
Если исключить измерение массы линейки, то решение не требует измерения объема пластилина, поэтому вместо мерного стакана можно использовать обычный, без шкалы.

Для измерения объема пластилина можно также пользоваться линейкой, если из пластилина слепить тело известной формы (кубик, шарик). Однако в этом случае точность измерений существенно уменьшится; правда, опять же, можно обойтись без мерного стакана.

Поиск решения.

Очевидно, что для определения плотностей и масс необходимо воспользоваться законом Архимеда, так как единственная известная величина, имеющая отношение к массе - плотность воды. Линейку следует использовать как коромысло весов, к концам которой с помощью ниток можно прикреплять кусочки пластилина. Лезвие можно использовать в качестве упора, на котором уравнивается линейка. Вариантов решения данной задачи может быть несколько, рассмотрим один из них.

Прикрепим к одному из концов линейки нитку, на которую в последствии будем прикреплять грузы. Удобно нить прикрепить к началу отсчета шкалы линейки. Уравновесивая линейку без грузов, можно определить положение ее центра масс - точка C на рис. . Отметим, что нет никакой гарантии, что центр масс реальной линейки находится точно в ее центре – линейку изготавливали люди из реального дерева, поэтому центр масс может быть незначительно смещен от центра. Обозначим a - расстояние от точки крепления нити до центра масс. Конечно, для однородной линейки эта величина близка к половине длине линейки. С помощью нити прикрепим к линейке кусок пластилина и уравновесим линейку. Обозначим расстояние от точки подвеса до упора l_1 (см. рис.). Опустим этот же кусок пластилина в воду и опять уравновесим линейку. Обозначим расстояние от точки подвеса до упора в этом случае l_2 .



Условия равновесия линейки в обоих случаях имеют вид

$$\begin{aligned} \rho V g l_1 &= m g (a - l_1) \\ (\rho - \rho_0) V g l_2 &= m g (a - l_2) \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ, ρ_0 - плотности пластилина и воды, соответственно, m - масса линейки, V - объем куска пластилина.

Из этих уравнений можно выразить плотность пластилина

$$\rho = \rho_0 \frac{a(l_2 - l_1)}{l_2(a - l_1)}. \quad (2)$$

Таким образом, для измерения плотности пластилина необходимо измерить:

- 1) a - расстояние от точки подвеса до центра масс;
- 2) l_1 - расстояние от упора до центра масс, при подвешенном пластилине;
- 3) l_2 - расстояние от упора до центра масс, при погружении пластилина в воду.

Все величины, входящие в эту формулу легко измеряемы.

Массу линейки также можно выразить из системы (1)

$$m = \rho V \frac{l_1}{a - l_1}, \quad (3)$$

Объем пластилина измеряется с помощью мерного стакана. Использование полученной формулы для расчета массы линейки не требует дополнительных измерений. Для увеличения точности измерения объема пластилина повышение уровня воды в мерном стакане можно использовать линейку, прикладывая ее к шкале стакана.

Имеет смысл провести несколько серий измерений для различных кусков пластилина. Понятно, что для каждого куска пластилина измерения всех требуемых величин следует провести несколько раз.

Для измерения плотности мела его следует полностью «завернуть» в пластилин. Затем с помощью мерного стакана можно измерить объем получившегося тела, а его массу легко измерить с помощью линейки известной массы и с известным положением центра масс. Для уменьшения числа измерений можно использовать тот же кусок пластилина, что и в первой части работы.

Дальнейший ход выполнения работы не вызывает никаких сложностей, поэтому здесь не приводится.

Следующий пример иллюстрирует основное правило «чистых экспериментаторов»: не все нужно измерять, и не все можно измерить – иногда можно чем-то и пренебречь.



Задача 2. Удельная теплота растворения гипосульфита.

При растворении гипосульфита в воде температура раствора сильно понижается.

Измерьте удельную теплоту растворения данного вещества.

Под удельной теплотой растворения понимают количество теплоты, необходимое для растворения единицы массы вещества.

Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, плотность воды $\rho = 1,0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Оборудование: калориметр; мензурка или мерный стакан; весы с разновесами; термометр; гипосульфит кристаллический; теплая вода.

Комментарии к условию.

1. Современное развитие электроники усложнило подготовку оборудования для этой задачи. Действительно, цифровые фотоаппараты практически вытеснили традиционную «мокрую» фотографию, в которой гипосульфит использовался в качестве закрепителя и в изобилии водился в магазинах.
2. Измерения в данной задаче надо проводить быстро, чтобы вода не успела остынуть из-за потерь теплоты в окружающую среду.
3. Удельная теплота растворения не изучается в средней школе, поэтому в условии задачи приведено ее определение (которое понятно и очевидно).

Решение и обсуждение.

Основная идея эксперимента ясна: необходимо известное количество гипосульфита засыпать в известное количество воды и измерить понижение температуры. Для строгих расчетов удельной теплоты растворения необходимо знать (или измерить) теплоемкость калориметра, знать удельную теплоемкость гипосульфита, каким-то образом учесть потери теплоты в окружающую среду. Эти величины определить не просто. Поэтому для начала попробуем ими пренебречь, а затем оценим правомочность подобного допущения.

Итак, пренебрегая теплоемкостями калориметра и гипосульфита, а также потерями теплоты, уравнение теплового баланса при растворении можно записать в виде

$$cm(t_0 - t_1) = \lambda m_0, \quad (1)$$

где c - удельная теплоемкость воды, m - ее масса, m_0 - масса гипосульфита, λ - искомая удельная теплота растворения, t_0 - температура воды в калориметре до

растворения, t_1 - температура раствора после полного растворения. Из уравнения (1) следует расчетная формула

$$\lambda = \frac{cm(t_0 - t_1)}{m_0}, \quad (2)$$

из которой видно, какие величины необходимо измерить: массу воды можно определить с помощью мензурки и известной плотности, массу гипосульфита с помощью весов. Начальную и конечную температуру жидкости следует измерить термометром.

Приведем также формулу для расчета погрешности (удельную теплоемкость воды будем считать известной точно):

$$\Delta\lambda = \bar{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_0}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t_0 - t_1}\right)^2}. \quad (3)$$

Так как эксперимент будет проводиться однократно (из-за дефицита гипосульфита), то все погрешности прямых измерений являются приборными. Кроме того, при записи последнего слагаемого в формуле (3) учтено, что измерения начальной и конечной температур проводятся одним термометром.

Интересно, сколько же воды заливать в калориметр? С одной стороны, чем больше воды, тем обоснованнее можно пренебречь теплоемкостями калориметра и гипосульфита. С другой стороны – чем больше воды, тем меньше изменение ее температуры, поэтому тем больше погрешность измерения. В условии сказано, что температура изменяется «сильно», поэтому воды следует взять побольше, но так, чтобы гипосульфит поместился в стакан.

Проведенные измерения дали следующие результаты:

$$m = (150 \pm 2) \text{ г}; \quad \varepsilon_m \approx 1,3\%$$

$$m_0 = (30,0 \pm 0,5) \text{ г}; \quad \varepsilon_{m_0} \approx 1,7\%$$

$$t_0 = (54,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}; \quad t_1 = (43,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}; \quad \varepsilon_{t_0-t_1} = \frac{2 \cdot 0,5}{54 - 43} \approx 9\%$$

Вычисления по формулам (2)-(3) приводят к результату:

$$\lambda = (1,9 \pm 0,2) \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

с относительной погрешностью $\varepsilon = 10\%$.

Теперь следует оценить допустимость сделанных допущений. Теплоемкостями калориметра и гипосульфита действительно можно пренебречь, так как их величина на порядок меньше теплоемкости воды. Кроме того, в уравнение теплового баланса они входят с противоположными знаками. Нами проведены оценки - так количество теплоты, отданное калориметром, приблизительно равно 540 Дж, а количество теплоты, полученное кристаллическим гипосульфитом, приблизительно равно 480 Дж. Вода отдала примерно 5,7 кДж. Таким образом, пренебрежение этими количествами теплоты вносит погрешность $\varepsilon \approx \frac{540 - 480}{5700}$, что составляет менее 1%.

Таким образом, в данном случае основное правило экспериментаторов применимо.



3.2 Изучай зависимости!

При малейшей возможности экспериментальное исследование должно сводиться к изучению зависимостей. Как мы уже отмечали, экспериментальное изучение зависимостей имеет целый ряд преимуществ перед единичным измерением.

Во-первых, такие измерения позволяют подтвердить (или опровергнуть) теоретические построения.

Во-вторых, получение экспериментальной зависимости физических величин гарантирует, что вы случайно не попали в некую особую точку.

В-третьих, повышает точность результатов.

В-четвертых, позволяет иногда исключить измерения «трудно измеряемых» величин;

В-пятых, оценивается жюри большим числом баллов.

Проведение эксперимента по изучению зависимостей предполагает контролируемое изменение одной физической величины и измерение другой зависимой величины. Иногда, приходится изменять (возможно, и неконтролируемо) условия эксперимента и измерять две зависящие друг от друга величины. В любом случае, результатом такого эксперимента является набор пар взаимосвязанных физических величин $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$. Эти результаты могут обрабатываться различными способами, но построенный по этим данным график зависимости $y(x)$ (или $x(y)$) никогда не помешает. Даже внешний вид этого графика может быть весьма информативен, а при наличии добросовестной математической обработки дает наилучшее решение поставленной задачи.

Важной проблемой (в том числе и с точки зрения схемы оценивания) является разумное определение числа N точек, в которых проводятся измерения. Если этих точек мало, то вид зависимости «не вырисовывается», а если слишком много, то не хватает отведенного времени на проведение измерений. Поэтому при выборе числа точек следует руководствоваться следующими правилами:

1. Диапазон изменения исследуемых величин должен быть максимально возможным. Пределы изменения обычно ограничиваются

- чисто физическими причинами (как правило, не удастся нагреть воду до температуры выше 100°C);

- геометрическими размерами установки (трудно в лаборатории провести измерение времени падения с высоты более 5 метров);

- диапазонами измерения используемых приборов (ручным секундомером не измеришь сотые доли секунды);

- правилами техники безопасности (не следует подключать скрученную руками электрическую цепь к сети);

- временем проведения эксперимента (за пять отведенных часов не измеришь скорость роста ногтей);

- другими причинами.

2. Шаг изменения физической величины должен приводить к надежно регистрируемым изменениям измеряемой зависимой величины. Так при

измерении силы тока в цепи школьным амперметром, изменение ее параметров должно приводить к изменению силы тока не менее чем на 0,2А.

3. При наличии особенностей (максимумов, минимумов, точек разрыва и т.д.) густота точек вблизи этих особенностей должна быть увеличена.

4. Если случайные погрешности являются преобладающими, то увеличение числа точек (даже повторяющихся) увеличивает точность окончательного результата, поэтому в такой ситуации число экспериментальных точек, во многом, определяется требуемой точностью измерений.

Продemonстрируем преимущества совокупных измерений на простых примерах.



Задача 3. Математический маятник и ускорение свободного падения.

Если можешь не измерять - не измеряй!

Оборудование: штатив с лапкой, секундомер, кусок пластилина, линейка, нить.

Задание: измерить ускорение свободного падения с помощью математического маятника.

Комментарии к условию.

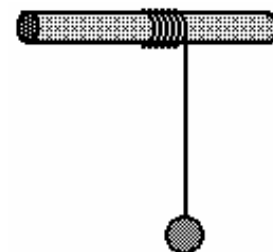
1. Изготовить математический маятник не представляет труда, в качестве груза можно использовать любой груз – пластилин, шарик (лучше металлический), гайку.
2. Длина нити должна быть не менее 0,5 метра, причем нить должна наматываться на стержень.

Решение.

Создание экспериментальной установки и проведение измерений и в этой задаче очевидны - небольшой кусок пластилина надо прикрепить к нити, которую можно повесить к лапке штатива, отклонить от вертикали и с помощью секундомера измерить время нескольких колебаний. Поэтому начнем с теоретического описания и разработки методики проведения эксперимента. Формула для периода T малых колебаний математического маятника длины L хорошо известна

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (1)$$

На первый взгляд, достаточно измерить длину маятника, период колебаний и затем из этой формулы выразить ускорение свободного падения. Однако для повышения точности измерений проведем исследование зависимости периода колебаний от длины нити. Для упрощения измерений длину нити можно **изменять**, наматывая ее на поддерживающий стержень. При этом длина свободного участка нити после n оборотов вокруг стержня выражается



формулой

$$L_n = L_0 - nS, \quad (2)$$

где L_0 - начальная длина нити, S - длина одного витка (понятно, что S равна периметру стержня и, если его сечение является окружностью, то $S = \pi D$, где D - диаметр). Таким образом, появляется возможность исследовать зависимость периода колебаний от целого (!) числа оборотов, а ошибиться в подсчете сделанных оборотов гораздо сложнее, чем в измерении набора длин нитей. Используя выражение (2), приведем зависимость (1) к линейному виду (для этого достаточно возвести ее в квадрат)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 L_0}{g} - \frac{4\pi^2 S}{g} n \quad (3)$$

Итак, мы получили линейную зависимость, идеально приспособленную для измерений. Обратите внимание, что нас даже не интересует начальная длина нити (а с ее измерением могут возникнуть проблемы – особенно, если подвешенный груз не является материальной точкой¹).

Удобно также применить графические методы обработки результатов – коэффициент

наклона $a = -\frac{4\pi^2 S}{g}$ графика зависимости $T^2(n)$ может быть найден как

непосредственно из графика, так и с помощью метода наименьших квадратов. Зная этот коэффициент наклона (и его погрешность) можно рассчитать ускорение свободного падения. Правда, для этого необходимо знать уменьшение длины нити S (периметра стержня), однако измерить ее не представляет труда. Достаточно саму нить несколько раз намотать на стержень (не забудьте точно измерить число этих оборотов), размотать и измерить длину полученного куска.

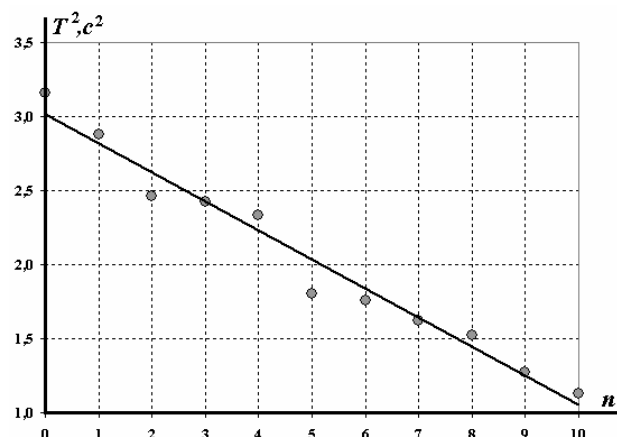
После этого ускорение свободного падения и его погрешность можно рассчитать по формулам:

$$g = -\frac{4\pi^2 S}{a}, \quad \Delta g = g \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2}. \quad (4)$$

Приведем результаты измерений (t - время 10 колебаний, T - период) и проведем их обработку.

Таблица результатов измерений.

n	t, c	T, c	T^2, c^2
0	17,8	1,78	3,160
1	17,0	1,70	2,881
2	15,7	1,57	2,465
3	15,6	1,56	2,422
4	15,3	1,53	2,330
5	13,4	1,34	1,801
6	13,3	1,33	1,759
7	12,7	1,27	1,620
8	12,3	1,23	1,524
9	11,3	1,13	1,269
10	10,6	1,06	1,132



¹ А когда он ею является?

Как и ожидалось, зависимость квадрата периода от числа сделанных витков в пределах погрешности измерений близка к линейной. Коэффициент наклона, рассчитанный по МНК, оказывается равным

$$a = (-0,19 \pm 0,02)c^2.$$

Для определения параметра S , было намотано 10 витков нити на стержень и затем измерена длина этого куска нити. В итоге получено значение $S = (4,90 \pm 0,05)см$. Расчет по этим данным значения ускорения свободного падения дает следующий результат

$$g = (10,21 \pm 0,11) \frac{M}{c^2},$$

не очень точно, но близко к известному табличному значению.

Следующий пример также достаточно часто встречается, как составная часть «длинных» экспериментальных задач.



Задача 4. Показатель преломления материала линзы.

Задание: измерьте показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза.

Оборудование: двояковыпуклая линза на подставке, источник света (лампочка на подставке с источником тока и соединительными проводами), экран на подставке, штангенциркуль, линейка.

Комментарии к условию.

1. Оборудование является стандартным, да и условие таковым же, поэтому ... без комментариев.

Разработка методики измерений.

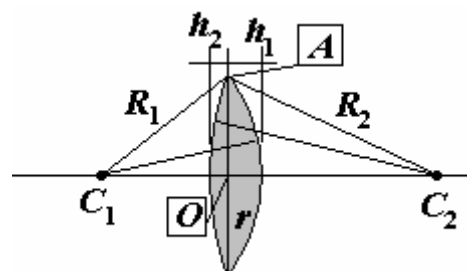
Показатель преломления материала линзы n входит в формулу для фокусного расстояния F :

$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

поэтому может быть рассчитан, если измерить фокусное расстояние линзы, а также радиусы кривизны R_1, R_2 поверхностей линз.

Наибольшую сложность вызывает измерение именно этих радиусов. На рисунке показан профиль двояковыпуклой линзы. Из рисунка следует, что радиус кривизны поверхности удовлетворяет уравнению (теорема Пифагора для треугольника AC_1O)

$$(R_1 - h_1)^2 + r^2 = R_1^2,$$



из которого следует

$$R_1 = \frac{r^2 + h_1^2}{2h_1}, \quad (2)$$

где r - радиус линзы, h_1 - толщина выпуклости задней поверхности. Радиус линзы легко измерить с помощью штангенциркуля. А как измерить толщину выпуклости? А может ее и не надо измерять! Сделаем еще один шаг. Подставим выражения для радиусов кривизны (для второго радиуса формула аналогична формуле (2)):

$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \left(\frac{2h_1}{r^2 + h_1^2} + \frac{2h_2}{r^2 + h_2^2} \right),$$

а теперь, внимание, Если в знаменателях пренебречь квадратами толщин выпуклостей, то эта формула приобретает вид:

$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{2h_1}{r^2 + h_1^2} + \frac{2h_2}{r^2 + h_2^2} \right) \approx (n-1) \frac{2(h_1 + h_2)}{r^2}, \quad (3)$$

в котором отсутствуют отдельные значения толщин выпуклостей, а только их сумма $(h_1 + h_2) = h$, то есть толщина линзы, которая легко измеряется штангенциркулем. Итак, с одной стороны мы огрубим расчетную формулу, но с другой существенно упростили требуемые измерения. Можно «на глаз» оценить погрешность, которую мы допустили при использовании указанного приближения. Радиус линзы r более чем в 10 раз больше ее толщины, поэтому сделанное приближение приводит к погрешности менее 1% , так как $\varepsilon \approx \frac{h^2}{r^2}$. Невысокая цена за существенное

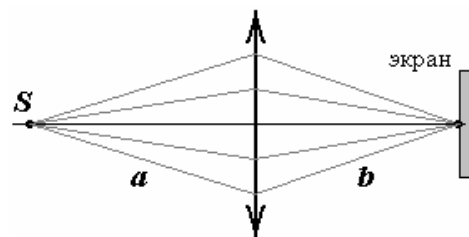
экспериментальное упрощение, тем более, что суммарная погрешность, скорее всего, превысит это значение. Поэтому с точки зрения экспериментатора переход к формуле (3) является громадным теоретическим достижением.

Обсудим теперь методику измерения фокусного расстояния линзы². Понятно, что идея измерений должна основываться на известной формуле линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad (4)$$

где a - расстояние от предмета до линзы, b - расстояние от линзы до изображения.

Таким образом, необходимо с помощью линзы получить четкое изображение светящейся лампочки и измерить нужные расстояния. Однако сложно точно определить положение экрана, при котором изображение является «четким». Поэтому единственный выход повышения точности окончательного результата – увеличение числа измерений. Причем здесь необходимо вспомнить и воспользоваться замечательным правилом экспериментатора:³ **изучай зависимость!** Иными словами, необходимо провести измерения нескольких пар значений расстояний (a, b) , причем



² В условиях спешки и нервного напряжения весьма вероятны грубые ошибки, поэтому всегда полезно знать примерное значение той величины, которую собираешься измерять. Поэтому допустимо (об этом можно не писать в своей работе) провести грубые, оценочные измерения. Так в данном случае можно с помощью линзы можно получить изображение удаленного светящегося предмета (окна, ламп на потолке) на экране (или на ладони) и измерить расстояние между линзой и изображением – оно примерно равно фокусному расстоянию линзы.

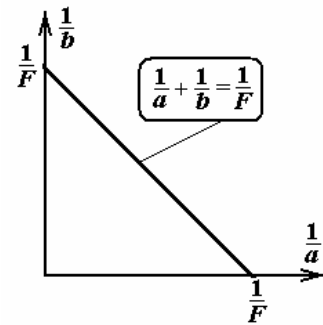
³ Здесь может торжествовать теоретик – ему достаточно одной пары значений.

заметно изменяя эти параметры. Эти измерения удобно проводить следующим образом: установить экран и лампочку на некотором расстоянии друг от друга, затем найти два положения линзы между ними, при которых на экране получается четкое изображение, провести эту процедуру несколько раз.

Обратимся к формуле линзы (4), которая допускает красивую геометрическую интерпретацию. Если по осям координат отложить величины $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, то уравнение (4) определяет в этих координатах отрезок прямой, отсекающий на осях величину обратную фокусному расстоянию.

Итак, окончательная последовательность измерений и обработки их результатов должна быть следующей:

- измерить толщину и радиус линзы h, r (не забывая об оценке погрешностей $\Delta h, \Delta r$);
- провести серию измерений расстояний (a, b) , при которых на экране получается четкое изображение лампочки; эти измерения удобно проводить следующим образом: установить экран и лампочку на некотором расстоянии друг от друга, затем найти два положения линзы между ними, при которых на экране получается четкое изображение, провести эту процедуру несколько раз;



- далее следует построить зависимость величины $Y = \frac{1}{b}$ от величины $X = \frac{1}{a}$ и убедиться, что она линейна и проходит под равными углами 45° к осям;
- с помощью МНК (или графически) определить коэффициенты линейной зависимости

$$Y = KX + C,$$

- убедиться, что параметр K этой зависимости в пределах погрешности равен 1, определить значение параметра C и его погрешность ΔC ;
- согласно формулам (3)-(4) этот параметр равен

$$C = (n-1) \frac{2h}{r^2};$$

поэтому значение показателя преломления рассчитывается по формуле

$$n = 1 + C \frac{r^2}{2h}, \quad (5)$$

- погрешность показателя преломления рассчитывается по формуле

$$\Delta n = (n-1) \sqrt{\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}. \quad (6)$$

Работа проста и хорошо знакома – рекомендую самостоятельно провести измерения и обработку результатов самостоятельно.



3.3 Обработка нелинейных зависимостей.

В некоторых случаях теоретическая зависимость может быть достаточно сложной, так что ее непосредственная экспериментальная проверка затруднительна, особенно в тех случаях, когда неизвестны некоторые параметры этой зависимости.

В такой ситуации можно исследовать некоторые следствия из теоретической модели, допускающие экспериментальную проверку.

Большой интерес представляют особенности сложных зависимостей, такие как экстремумы (максимумы и минимумы), точки разрыва и т.д. Как уже отмечалось, вблизи этих особенностей густота экспериментальных точек должна быть выше. Наличие указанных особенностей позволяет экспериментально проверить физическую модель рассматриваемого явления, точное (по возможности) определение параметров особенности, как правило, позволяет найти некоторые численные характеристики изучаемой системы.

Иными словами, «сложные» зависимости встречаются в физике и их надо уметь исследовать.

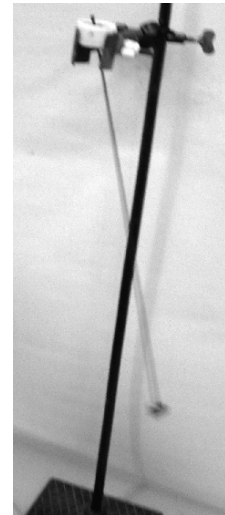
В качестве примера исследования приведем экспериментальную задачу, основная цель которой – изучение колебаний физического маятника.

Оборудование, необходимое для выполнения этого задания, примитивно, поэтому работа может быть выполнена не только в любом кабинете физики, но и дома, на кухне. Собственно экспериментальная часть задания также не слишком сложна, хотя и требует известной аккуратности в проведении измерений. Наиболее важной частью в данном изложении является анализ возможностей сравнения теоретических и экспериментальных данных, в том случае, когда явная линеаризация зависимости не очевидна. Поэтому здесь рассмотрено несколько возможных вариантов такого сравнения.



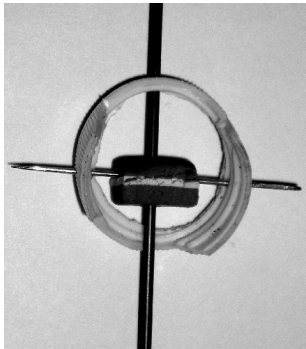
Задача 5. «Колебания стержня»

Всякая неизвестная функция линейна, если она не парабола



Оборудование:

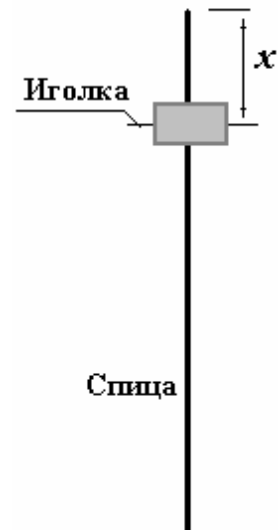
1. Штатив с лапкой .
2. Секундомер.
3. Спица вязальная
4. Ластик
- 5 Иголлка
6. Линейка
7. Пробка пластиковая от пластиковой бутылки.



Изготовьте подвес для спицы, как показано на фотографии и закрепите его в штативе. Используйте иглу как ось вращения спицы: для этого насадите на спицу кусочек ластика, а затем перпендикулярно спице воткните иголку, потом концы иголочки должны пройти через боковые стенки пробки. Спица должна легко колебаться вокруг оси. В ходе измерений вам необходимо изменять положение оси относительно спицы – для этого спицу следует сдвигать относительно оси, двигая ластик с иголочкой по спице.

Обозначим длину спицы L (надеюсь, вы сумеете ее измерить), а длину ее верхней части (над иголочкой) - x . Период колебаний такого маятника (если спица однородная) определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{g\left(\frac{L}{2} - x\right)}}. \quad (1)$$



Вам предстоит проверить выполнимость этой формулы.

1. Исследуйте зависимость периода колебаний получившегося физического маятника от длины верхней части спицы. Постройте график полученной зависимости. Проверьте выполнимость формулы (1) в вашем случае.
2. Определите с максимально возможной точностью минимальный период колебаний полученного маятника.
3. Определите значение ускорения свободного падения.

Если к нижнему концу спицы прикрепить небольшой груз массы m (половинку ластика), то период колебаний такого маятника будет определяться формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{12} + M \left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + m(L-x)^2}{(M+m)g \left(\frac{ML+2mL}{2(M+m)} - x\right)}}. \quad (2)$$

4. Выполните задание пункта 1. для этого маятника.

Анализ и решение.

Формулы, приведенные в условии, громоздки, значения некоторых параметров, входящих в них неизвестны, поэтому сначала попытаемся их упростить и привести к виду, удобному для проверки.

Обозначим $z = \left(\frac{L}{2} - x\right)$ - расстояние от центра подвеса до центра масс стержня; $\frac{L^2}{12} = a^2$. Тогда формулу (1) из условия можно переписать в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{gz}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{\frac{a}{z} + \frac{z}{a}}. \quad (1)$$

Функция, стоящая под вторым корнем $F(z) = \frac{a}{z} + \frac{z}{a}$ «красива и симметрична»: ее минимальное значение $F_{\min} = 2$, при $z^* = a$. Поэтому минимальный период равен

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{g}}. \quad (2)$$

Теперь формулу (1) можно представить в эквивалентном виде

$$T = T_{\min} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{z} + \frac{z}{a}\right)}. \quad (3)$$

Эта формула уже не столь пугающая, как исходная. Правда, для ее экспериментальной проверки требуется определить с максимально возможной точностью значение минимального периода колебаний⁴.

Теперь можно приступить к проведению измерений. Длина спицы равна $L = 35 \text{ см} = 0,35 \text{ м}$.

В таблице 1. приведены результаты измерений периода колебаний стержня без груза при различных положениях оси. Обратите внимание, что время 20 колебаний измерено дважды для каждого положения точки повеса. Это сделано для того, чтобы исключить грубые промахи и иметь представление о порядке

⁴ Именно поэтому этот пункт выделен отдельно в условии задания.

погрешности измерений – погрешность измерения времени 20 колебаний по порядку величины составляет 0,1 секунды. Период колебаний рассчитан как сумма времен, деленная на 40 (так как всего 40 колебаний). Погрешность определения периода (опять по порядку величины) оценивается как $\frac{0,1c}{40} \approx 3 \cdot 10^{-3} c$, поэтому допустимо рассчитывать период с точностью до $10^{-3} c$ (хотя последняя цифра очень сомнительная).

Таблица 1. Колебания стержня без груза внизу.

X, мм	Время 20 колебаний, с		Период, T, с
10	19,15	19,09	0,956
21	19,01	18,89	0,948
28	18,71	18,78	0,937
37	18,7	18,56	0,932
43	18,53	18,48	0,925
52	18,3	18,38	0,917
61	18,14	18,1	0,906
72	18,19	18,11	0,908
80	18,22	18,2	0,911
87	18,2	18,26	0,912
95	18,59	18,39	0,925
103	18,59	18,65	0,931
111	19,23	19,07	0,958
116	19,62	19,47	0,977
123	20,09	20,11	1,005
131	21,37	21,37	1,069

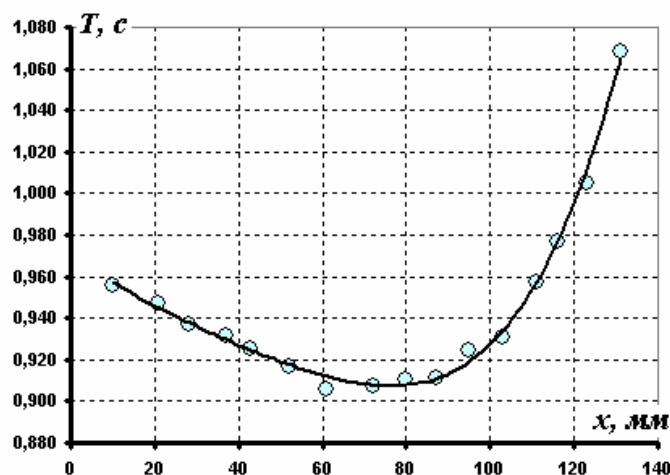


Рис.1 Зависимость периода колебаний стержня T от координаты точки подвеса X

На рис. 1 построен график этой зависимости, «на глаз» проведена сглаживающая кривая.

Естественно, что экспериментальные значения периодов колебаний получены с некоторой погрешностью, особенно заметен разброс значений вблизи минимума, где точные значения периода изменяются незначительно.

Проверка выполнимости формулы может быть проведена несколькими способами.

Способ 1.

Прямое построение графика теоретической зависимости (1). Правда, при этом надо знать значение ускорения свободного падения (пусть $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$). На Рис.2 представлены результаты таких расчетов.

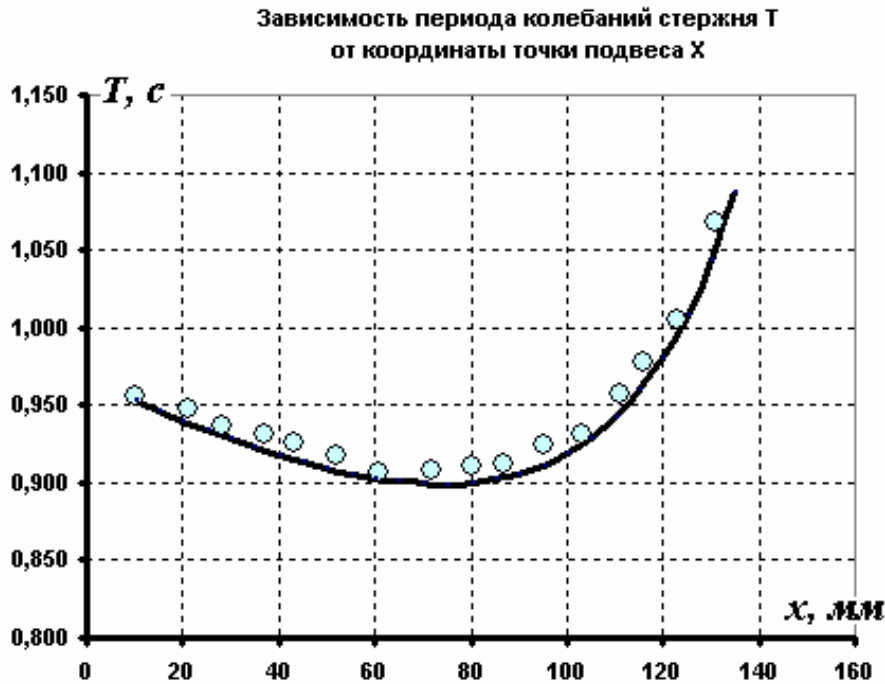


Рис.2 Сравнение с теоретической кривой.

К сожалению, наблюдается систематическое отклонение экспериментальных точек от теоретической зависимости. Для объяснения этого отклонения можно привлечь несколько гипотез: приведенная формула (1) справедлива для идеального стержня и не учитывает влияния узла подвеса; неверно выбрано значение ускорения свободного падения (что сомнительно). В любом случае, во время экспериментального тура думать об этом некогда.

Способ 2.

Провести нормировку на минимальное значение периода. Из формул (1) , (3) следует, что

$$\frac{T}{T_{\min}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{z} + \frac{z}{a} \right)}. \tag{4}$$

Эта формула допускает прямую проверку, так величина $a = \frac{L}{\sqrt{12}} \approx 0,101\text{м}$ известна с

«хорошей» точностью, важно также отметить, что значение g в этом случае не требуется. Но для проведения расчетов необходимо знать значение минимального периода, в качестве которого возьмем непосредственное минимальное значение из

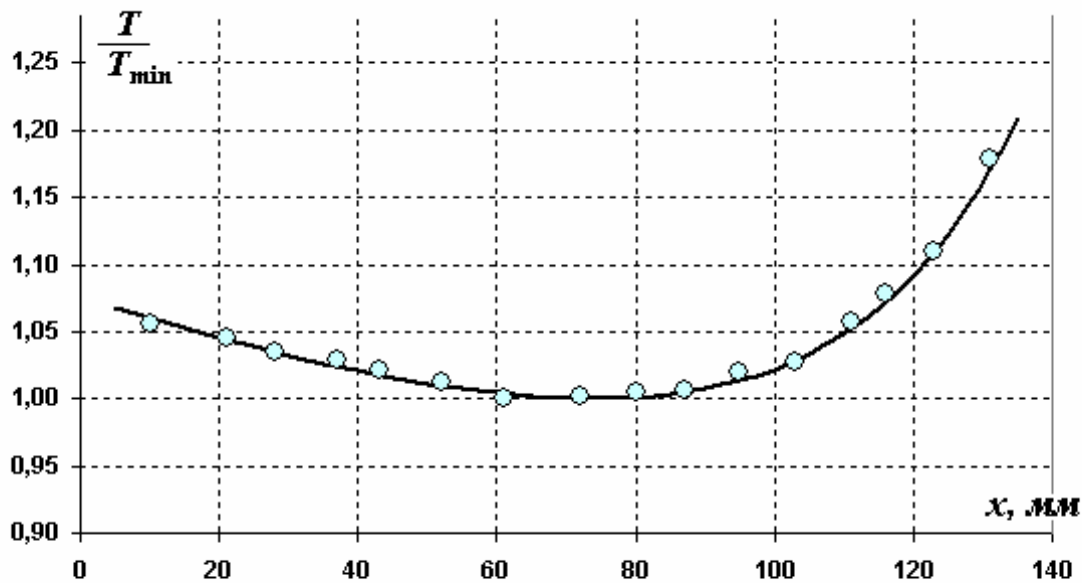


Рис. 3 "относительный период"

результатов измерений $T_{\min} = 0,906\text{с}$. На рис. 3 построен график теоретической зависимости с нанесенными экспериментальными точками – здесь соответствие практически полное.

Способ 3.

Провести линеаризацию зависимости (1), для чего представить ее в виде

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \frac{\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{L}{2} - x\right)}, \quad (5)$$

и построить график зависимости T^2 от параметра $\xi = \frac{\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{L}{2} - x\right)}$. График этой

линеаризованной зависимости представлен на рис. 4.

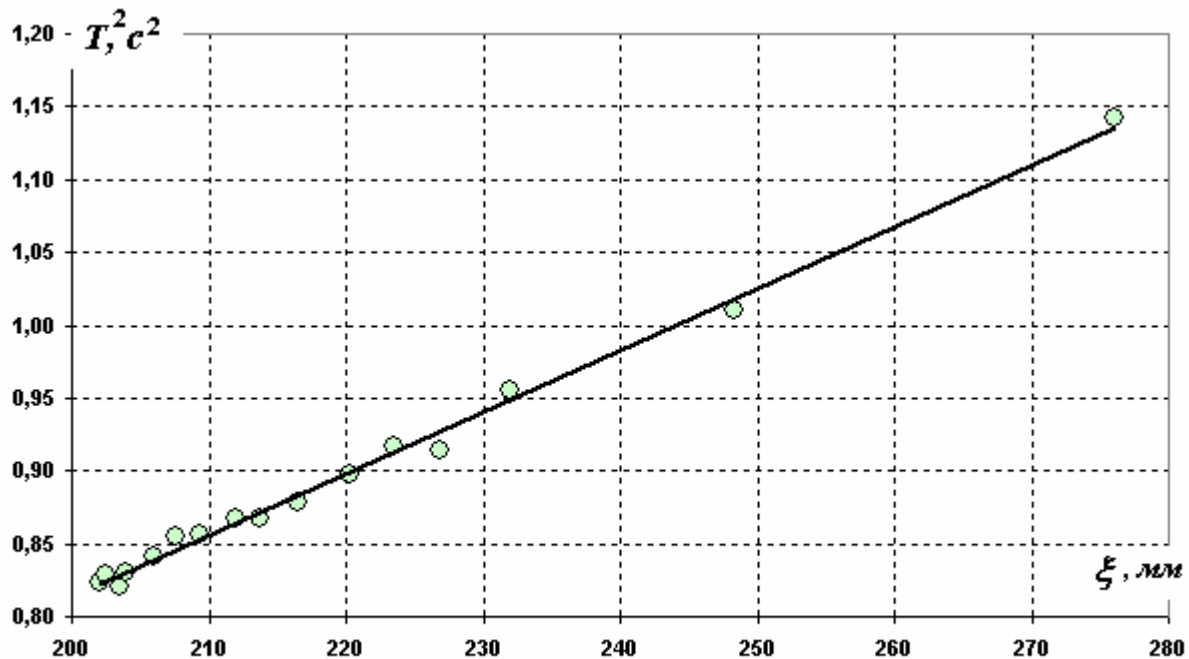


Рис. 4 Линеаризованная зависимость

Этот вид является оптимальным, так как позволяет найти значение ускорение свободного падения. Так из формулы (5) следует, что коэффициент наклона данной прямой равен $K = \frac{\Delta T^2}{\Delta \xi} = \frac{4\pi^2}{g}$. Найденный с помощью графика 4 по методу

наименьших квадратов этот коэффициент равен $K \approx 4,23(4,23 \pm 0,17) \frac{c^2}{m}$. По этим

данным находим $g = \frac{4\pi^2}{K} \approx (9,4 \pm 0,4) \frac{m}{c^2}$.

2. Для определения минимального периода колебаний можно провести дополнительные измерения вблизи точки минимума: по нашим данным $T_{\min} \approx 0,906c$.

3. Один раз ускорение свободного падения уже определено. Вторым способом определения ускорения является использование теоретической формулы для минимального периода (3). Из этой формулы можно определить $g = \frac{4\pi^2 L}{\sqrt{3} T_{\min}^2} \approx 9,7 \frac{m}{c^2}$.

Здесь результат получен более привычный, кроме того, получен с меньшими временными затратами.

Часть 2.

Вторая формула, приведенная в условии еще более страшная, да и неизвестных величин в ней больше. Для приведения ее к виду, допускающему экспериментальную проверку, заметим, что величина $\frac{ML + 2mL}{2(M + m)} = x_c$ является

координатой центра масс маятника с дополнительным грузом. Формулу, приведенную в условии, можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{12} + M \left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + m(L-x)^2}{(M+m)g \left(\frac{ML+2mL}{2(M+m)} - x\right)}} = \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{3} + mL^2 - (M+m)x_C^2 + (M+m)(x_C-x)^2}{(M+m)g(x_C-x)}} = . \quad (6) \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{3} + mL^2 - (M+m)x_C^2}{(M+m)} + (x_C-x)^2}{g(x_C-x)}
 \end{aligned}$$

Если теперь обозначить $\frac{M \frac{L^2}{3} + mL^2 - (M+m)x_C^2}{(M+m)} = a^2$, $(x_C - x) = z$, то получим

формулу, полностью совпадающую с «симметричной» формулой (2). Поэтому ее экспериментальная проверка может быть проведена теми же методами, рассмотренными выше. Положение центра масс и отношение масс груза и спицы легко определить, уравновесив маятник на упоре.

Рассмотрим пример более сложного исследования, включающий несколько принципиально различных экспериментальных методов. В этой задаче основные сложности связаны с теоретической разработкой методики проведения измерений и обработки их результатов, именно с этим и связано название очередной задачи⁵.

⁵ Обратите также внимание на длину условия этой задачи – олимпиадные экспериментальные задания последних лет обычно имеют именно такую длину.



Задача 6. «Мечта теоретика»

Оборудование: полоска прозрачной пленки, лист миллиметровой бумаги, два коробка спичек, источник света, подставка, 2 кнопки канцелярские.

Деформации тел не всегда поддаются точному теоретическому описанию. Даже такой простой вид деформации как изгиб тонкой полоски рассчитать не просто. Поэтому экспериментальное исследование этих проблем чрезвычайно важно.

Полоска пленки располагается между двумя упорами (в качестве которых используйте коробки) на листе миллиметровой бумаги. Используйте следующие обозначения (Рис. 1):

- длина недеформированной полоски L ;
- расстояние между упорами l ;
- величина прогиба h .

Используйте систему координат, в которой форма деформированной полоски симметрична относительно оси Oy . Форма профиля изогнутой полоски описывается уравнением $y(x)$.

Форма деформированной полоски существенно зависит от способа закрепления концов. Вам необходимо исследовать форму полоски в двух случаях, которые описаны далее. Конечной целью работы является установление приближенного уравнения изогнутой пленки $y(x)$.

Помимо непосредственных геометрических измерений оптическими методами можно измерять радиус кривизны изогнутой полоски. Для этого полоску следует осветить параллельным потоком света, так чтобы на миллиметровой бумаге были видны как падающие, так и отраженные от пленки лучи (для этого подставку с пленкой можно слегка наклонить). При этом на бумаге можно наблюдать освещенный участок с резким пиком (каустика), вершина которого является фокусом отражающей поверхности (см. Фото). Возможно, что вам не удастся увидеть такие яркие картинки отраженных лучей (на фотографиях это отражение от лампы-вспышки), но фокус можно найти всегда!

Выполнение данной работы требует предельной аккуратности. Следите, чтобы полоска располагалась симметрично между упорами – при этом форма освещенной поверхности также должна быть симметричной.

Наконец, последняя подсказка: при поиске точного положения фокуса, образованного центральной частью полоски полезно перекрывать падающий пучок узким препятствием (карандашом или пальцем, наконец) при этом среди отраженных

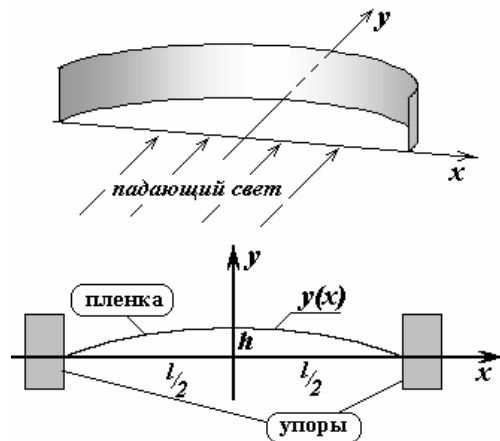
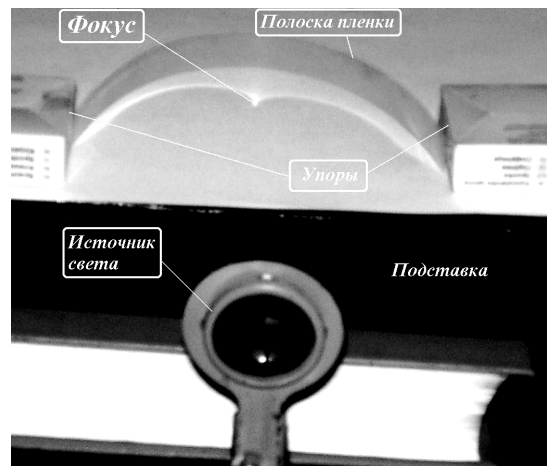


Рис. 1



лучей можно увидеть отраженную тень (законы отражения для света и тени одинаковы).

Часть 1. Свободные концы.

Расположите полоску пленки между двумя упорами (в качестве которых используйте коробки), концы пленки должны свободно опираться на стенки коробков, но не скользить по ним.

Для упрощения задачи выдвинем две гипотезы:

А) профиль изогнутой поверхности является участком **параболы**;

Б) профиль изогнутой поверхности является участком **синусоиды**.

Вам необходимо отдать предпочтение одной из этих гипотез.

1.1 Прямое измерение профиля.

1.1.1 Запишите уравнения профиля поверхности пленки $y(x)$ для каждой гипотезы, считая известными расстояние между упорами l и величину прогиба h .

1.1.2 Установите пленку на миллиметровой бумаге так, чтобы расстояние между упорами составляло три четверти от длины пленки $l = 0,75L$. Измерьте форму профиля пленки $y_{\text{экс.}}(x)$. Постройте график этой функции. Сравните полученные экспериментальные данные с теоретическими предсказаниями пункта 1.1.

1.1.3 Какая из высказанных гипотез ближе к результатам эксперимента?

Что значит, по вашему мнению, «ближе»?

1.2 Изменение прогиба.

1.2.1 Покажите, что для обеих гипотез справедливо следующее утверждение: фокусное расстояние центральной части изогнутой пленки линейно зависит от

параметра $z = \frac{l^2}{h}$.

Установите теоретический вид этой зависимости для обеих гипотез.

Подсказка: если кривая задана уравнением $y(x)$, то ее радиус кривизны в точке экстремума обратно пропорционален второй производной от этой функции в этой точке $R = |y''|^{-1}$.

1.2.2 Измерьте зависимости величины прогиба $h(l)$ и фокусного $F(l)$ изогнутой пленки от расстояния между упорами. Постройте графики полученных зависимостей.

1.2.3 Проверьте выполнение теоретического утверждения п.1.2.1.

Совет: сильно не удивляйтесь – непонятная постоянная составляющая может появиться по многим причинам (например, не идеальна параллельность падающего потока)

1.2.4 На основании данных этого раздела 1.2 ответьте на вопрос: «Какая из высказанных гипотез ближе к результатам эксперимента?»