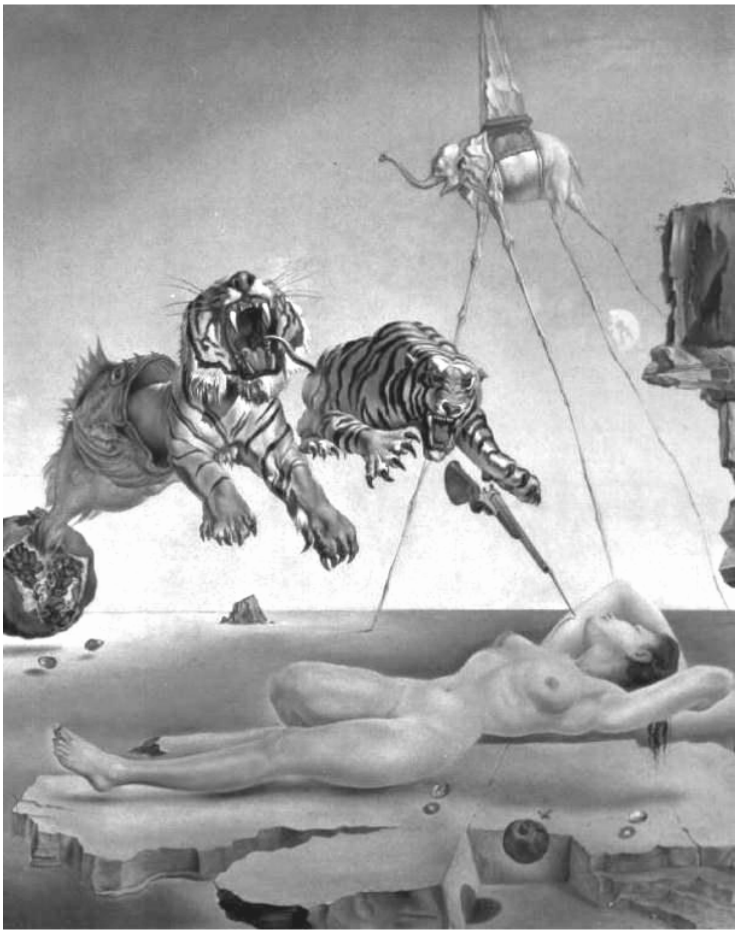
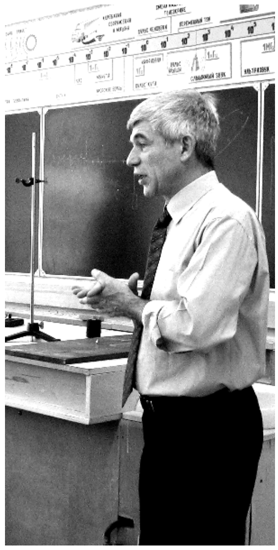


А.И. Слободянюк

Физическая олимпиада: экспериментальный тур



Каждый школьник, выучивший две-три (или два-три десятка) формулы из учебника, считает себя достойным участником физической олимпиады любого уровня от школьного до международного. Неудачное выступление на олимпиаде, как правило, не переводит учащегося в состояние уныния, потому как он тут же находит множество причин своего провала: плохо себя чувствовал; не писала ручка; не «проходили» ту или иную тему; попалась совсем незнакомая задача и т.д. и т.п. По-видимому, это правильно и хорошо, было бы гораздо хуже, если бы при первой неудаче у юного, но талантливого физика сразу опускались руки. В действительности, успешное выступление на олимпиаде требует определенной подготовки, как в смысле накопления «знаний, умений, навыков», так и в психологическом плане - умения сосредоточиться на быструю и точную работу, настроиться на импульсное и даже «взрывное» включение своей интеллектуальной мощи (или «мощей»). Безусловно, что единственный, и поэтому лучший, способ подготовки к олимпиаде - самостоятельное выполнение заданий предыдущих олимпиад, решение большого числа сложных задач, проведение экспериментальных исследований, не говоря уж, конечно, об изучении основного материала учебной программы.

С этой точки зрения теоретический тур олимпиад имеет существенные преимущества: имеется достаточное количество учебных пособий и сборников олимпиадных теоретических задач, да и число «обычных» сборников задач значительно превышает число книг, посвященных проведению физического эксперимента. Может тогда стоит вообще отказаться от проведения экспериментального тура? Мы глубоко убеждены, что такое решение будет в корне неверным - физикам наука экспериментальная, без эксперимента она приблизится к казуистике, исследующей проблемы типа: «сколько чертей массой m поместятся на кончике иглы плотностью ρ ».

В конце концов, теоретический и экспериментальные туры прекрасно дополняют друг друга: в первом участники «доказывают, как должно быть», а во втором смотрят «как есть на самом деле».

Итак,

будучи уверенными в необходимости физического эксперимента,

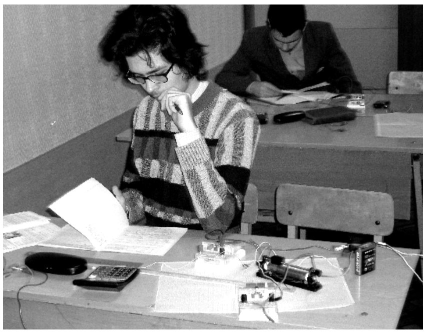
искренне желая помочь вашим талантам,

зная, что в ближайшее время олимпиады не закончатся,

надеясь получить законный гонорар,

написана эта книга, в которой собраны экспериментальные задания белорусских физических олимпиад: приведены условия заданий, даны указания по их выполнению, а в некоторых случаях даже проведены измерения, обработаны и получены какие-то результаты.

Автор.



Что такое хорошая экспериментальная задача?

С нашей точки зрения, экспериментальное задание по своей сути должно являться **исследованием физического явления**, по возможности, достаточно полным и комплексным. Под комплексным исследованием явления мы понимаем изучение различных его аспектов, получение зависимостей конечного результата от целого набора варьируемых параметров. Желательно также, чтобы этот комплекс исследований включал в себя применение знаний из различных разделов физики. Такой подход заметно отличается от постановки заданий традиционных лабораторных работ школьного курса. Фактически, методика выполнение только одного этапа заданий олимпиады совпадает с методикой выполнения лабораторной работы - измерение отдельных физических величин, проверка отдельного физического закона.

Перечень явлений, изучаемых в курсе физики средней школы достаточно широк, однако, немногие из них допускают прямую экспериментальную проверку.

Не составляет труда дать практически полный перечень возможных физических величин, которые традиционно измеряются в школьном курсе: плотность (закон Архимеда), удельное электрическое сопротивление (закон Ома), удельная теплоемкость (тепловой баланс), коэффициент трения (на наклонной плоскости), коэффициент жесткости пружины (закон Гука), ускорение свободного падения (математический маятник), показатель преломления (закон Снелиуса), длина волны света (дифракционная решетка).

Конечно, ни республиканские, ни тем более международные олимпиады, не могут ограничиться этим списком - практически всегда рамки этого списка расширяются. Тем не менее, **предлагаемая задача не должна выходить за рамки учебной программы**. В некоторых случаях в качестве объекта исследования используются некоторые простые явления, которые непосредственно не входят в программу, но доступны пониманию учащихся на основании общих физических законов, изучаемых в школе, иногда бывает достаточно просто здравого смысла и обыденного опыта, а иногда, наоборот, требуется провести исследование, достойное места в истории.

В таких случаях, в условии задачи мы приводим некоторые формулы, законы, определения, которые могут потребоваться в ходе выполнения работы.

Использование приборов, проведение измерений, методы обработки результатов - вот перечень базовых навыков, которыми должен обладать участник олимпиады, для выполнения полученных заданий.

К нашему глубокому сожалению, одной из самых трудноразрешимых проблем подготовки экспериментальных заданий является **подбор необходимого оборудования**. Помимо того, что оно должно удовлетворять требованиям техники безопасности, быть простым и надежным, с ним должны быть знакомы участники олимпиады - его, прежде всего, необходимо найти или изготовить в нужном количестве. Поэтому часто приходится готовить задание, требующее самого простого оборудования. Заметим, однако, и что на примитивном оборудовании можно выполнять учебные работы весьма высокого методического уровня. В качестве собственного оправдания отказа от использования ускорителей на встречных пучках, заметим, что очень многие фундаментальные открытия были сделаны с помощью «сургуча и веревочек» - неужели учащиеся XXI века уступают ученым века XVII?

Мы считаем, что физический эксперимент на олимпиаде должен давать **количественные результаты** с приемлемой точностью. Поэтому из перечня возможных экспериментальных проблем должны быть исключены те, изучение или демонстрация которых носит иллюстративный характер. При проведении измерений на олимпиаде участник существенно ограничен во времени. Поэтому явно или неявно предлагаемая схема эксперимента должна исключать по мере возможности влияние побочных факторов, затрудняющих интерпретацию результатов.

Успеху того или иного задания, во многом способствует, хорошая формулировка условия. С одной стороны, она должна оставлять определенный простор для творческого поиска, с другой стороны, должна быть достаточно конкретной, указывающей основной порядок проведения эксперимента.

Таким образом, **хорошая экспериментальная олимпиадная задача должна быть четко и однозначно сформулирована, иметь исследовательский комплексный характер, выполняться на достаточно простом оборудовании за ограниченное время, приводить к количественным результатам, допускающим, после соответствующей математической обработки, наглядную и физически верную интерпретацию.**

Разработка экспериментальных заданий олимпиад требует много времени, которое затрачивается на выбор темы исследования, подготовку и изготовление оборудования, неоднократное проведение измерений и их обработку, формулировку условий, выработку критериев оценивая и т.д. При этом в ходе работы первоначальные идеи, задуманные схемы экспериментов неоднократно меняются и отвергаются. Наш многолетний опыт показывает, что «коэффициент полезного действия» (отношение числа подготовленных задач к числу исходных идей) редко превышает двадцать процентов.

В заключение данного раздела, отметим, что авторы задач оставляют за собой право включать в перечень заданий некоторые «ловушки», позволяющие выявить тех «хитрых» участников, которые предпочитают «сочинить» результаты экспериментов, а не заниматься их получением.

<u>Часть 1.</u> Методика выполнения экспериментальных заданий.

Методист - рассказывает как бы он
выполнил задание, если бы умел.
(Экспериментальный факт)

Каждое экспериментальной задание имеет свои собственные специфические особенности, которые могут потребовать особых подходов в решении. Однако даже в такой ситуации знание общих методов проведения экспериментальных исследований не сможет навредить - легче отступить на шаг в сторону от известного пути, чем каждый раз искать принципиально новый путь. Поэтому рассмотрим основные традиционные этапы выполнения экспериментального задания.

1.1 Ознакомление с условием задания и предлагаемым оборудованием.

В начале было слово
(Евангелие от Иоанна)

В настоящее время длина условия постоянно растет[1]. По ходу внимательного изучения условия задачи необходимо четко уяснить смысл предлагаемого задания, понять его основные этапы, увидеть взаимосвязи между различными его частями. Обязательно следует сразу ознакомиться с перечнем предлагаемого оборудования, убедиться в его наличии, вспомнить название и назначение каждого прибора. Если же в приведенном перечне что-то непонятно, то следует уточнить у организаторов - может трудно догадаться, что «мобильный элемент циркулярной формы» это просто какое-нибудь колечко.

В результате изучения условия следует предельно конкретно сформулировать цели, которые должны быть достигнуты в ходе выполнения каждого пункта задания. Эта проблема отпадает, если задание требует определение численного значения какой-либо физической величины. В том же случае, когда задача заключается в изучении какого-либо закона, либо в экспериментальной проверке формулы, требуется конкретизация - какие именно зависимости следует получить. Заметим, что часто эти зависимости могут быть указаны в подпунктах заданий, поэтому не следует сразу бросаться за выполнение одного из пунктов, не дочитав всего условия до конца.

[1] Отметим, что условия экспериментальных заданий Международной физической олимпиады излагаются не менее чем на 10 страницах.

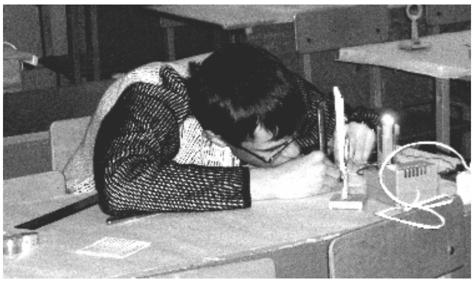
1.2 Построение математической модели изучаемого явления (теоретическое описание).

Скупа теория...
(В.Гете)

Экспериментальное задание, как правило, не требует решения сложных теоретических задач. Однако вид исследуемых зависимостей желательно знать заранее. Следует подумать о возможном упрощении полученных функций, о возможности их линеаризации. Заметим, что графическое представление полученных результатов является почти обязательным, а обработка линейных зависимостей значительно проще всех остальных. В ходе теоретического анализа необходимо выяснить, численные значения каких физических параметров необходимо знать (или измерять) обязательно, а без каких можно обойтись.

Заметим, что даже если необходимо измерить одну физическую величину, то проведение совокупных измерений (то есть исследование функциональной зависимости) предпочтительнее перед одним измерением. Такие измерения позволяют проверить правильность теоретических построений и существенно уменьшают погрешность полученного результата. Конечно, план в ходе работы может быть скорректирован, но, по словам шахматистов «лучше играть по плохому плану, чем совсем без плана».

Здесь нелишне запомнить одну из заповедей экспериментатора: *чем меньше величин надо измерять, тем лучше схема эксперимента*. Уменьшение числа измеряемых параметров упрощает эксперимент, сокращает время его проведения, как правило, повышает точность и достоверность полученных результатов. Результатом теоретического анализа должен быть план проведения измерений - какие физические величины и зависимости должны быть измерены, с какой точностью, каким методом полученные результаты будут обрабатываться. Не вредно также представить себе примерные численные значения ожидаемых результатов, например, не стоит надеяться, что ускорение свободного значения существенно превысит $20\frac{м}{с^2}$.



1.3 Разработка схемы экспериментальной установки, ее реализация, проведение предварительных измерений.

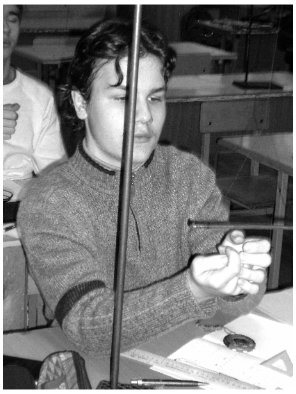
В настоящее время стоимость научных исследований значительно возросла.
(Из отчетного доклада XXIII съезду КПСС)

Не вредно подготовить предварительный эскиз экспериментальной установки, на которой следует измерять те величины, которые фигурируют в ранее разработанном плане. Особенно необходим такой эскиз при сборке электрических цепей, даже самых простых. Найти ошибку в подключенных и перепутавшихся проводах значительно сложнее, если под рукой нет принципиальной электрической схемы. Не повредит также и схема хода лучей в оптической установке. После этого, можно отложить в сторону ручку, бумагу и, засучив рукава, взяться за приборы. При непосредственной сборке экспериментальной установки следует стремиться к ее надежности, устойчивости, удобству работы. Желательно также найти место возле установки для экспериментатора и его рабочей тетради.

Проведение предварительных измерений является обязательным условием успешного выполнения задания - эта недолгая процедура позволяет проверить работоспособность установки, выявить наличие ожидаемых эффектов, оценить диапазоны изменения варьируемых параметров, оценить достижимость требуемой точности, и ... вернуться к предыдущему пункту - разработке иного теоретического описания.

Не следует, конечно, надеяться, что собранная установка сразу будет удовлетворять всем требованиям - очень часто ее необходимо модернизировать, изменять порядок проведения измерений, или делать вывод о ее непригодности. В таком печальном случае, необходимо менять идею и план проведения эксперимента, лучше сделать это на предварительном этапе, чем после длинной серии кропотливо проведенных экспериментов.

1.4 Проведение измерений.



Чем дальше эксперимент от теории,
тем ближе он к Нобелевской премии.
(Теоретическая гипотеза)

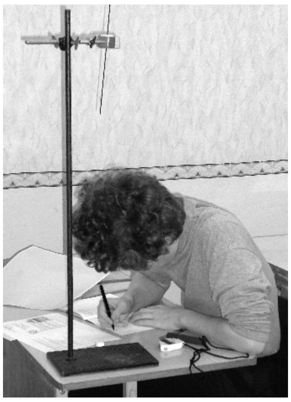
После того, как вы убедились в возможности реализации намеченного плана, можно приступать к проведению измерений. Поверьте, что заранее подготовленная таблица для записи полученных результатов существенно экономит время, как при проведении эксперимента, так и на этапе обработки его результатов. Поэтому, не пожалейте минутки времени на ее подготовку - «сэкономленная минута может стать последней».

При исследовании зависимостей необходимо варьировать в максимально возможных пределах задаваемые параметры - стремиться расширить диапазон их изменения. По меньшей мере, расширение диапазона повышает точность окончательного результата, не говоря уже о том, что больший диапазон внушает больше доверия к обоснованности теоретических построений.

Если теоретическая модель предсказывает линейную зависимость, то это не значит, что экспериментально достаточно снять показания для двух точек (даже на предельных значениях параметров)! Во-первых, где гарантия, что эти точки не окажутся в чем-то особенными? Во-вторых, ваша теоретическая модель может не подтверждаться экспериментально, и зависимость на самом деле не линейна. В-третьих, увеличение числа точек увеличивает точность измерений. Для получения достоверной линейной зависимости необходимо около 10 экспериментальных точек.

Снимая показания приборов, записывайте результаты с той максимальной точностью, которую обеспечивает ваша установка - отбросить лишние цифры вы всегда успеете. Конечно, если вы заранее, в ходе предварительных измерений оценили точность окончательного результата, то показания приборов сразу можно округлять, не забывая все же оставить одну запасную цифру.

Очень полезно в ходе измерений постоянно мысленно анализировать получаемые данные. Может быть, ваши данные вынудят вас остановиться, и, не теряя напрасно времени, пересмотреть свой план эксперимента. Однако к этому совету относитесь с осторожностью - вполне возможно, что надежно полученные результаты натолкнут вас на новые оригинальные идеи, как в теоретическом описании, так и в продолжение эксперимента.



1.5 Обработка результатов измерений.

Через любые две точки можно провести любую кривую и, причем, только одну.

(Теорема экспериментатора)

Этот этап работы подробно описывается в многочисленных изданиях. Кроме того, основные правила обработки результатов рассмотрены ниже. Поэтому здесь мы ограничимся простым перечислением того, что включает в себя обработка результатов измерений: вычисление численного значения измеряемых физических величин; оценку их погрешностей; правильное округление результата; грамотное построение графиков; обработку графических зависимостей. Не следует сильно увлекаться расчетом погрешностей, но нельзя им пренебрегать - любой эксперимент без оценки погрешностей имеет нулевую ценность. К сожалению, достаточно часто встречаются работы, в которых расчет погрешностей занимает основное место, явно в ущерб ее содержательной части; еще большее сожаление вызывают работы, в которых результаты измерения по методу «на глазок» приведены с десятью значащими цифрами.

Последний, но возможно самый важный совет: будьте честны перед собой - подгонка результатов (как умышленная, так и неумышленная) иногда может принести несколько лишних баллов, но чаще видна не вооруженным глазом (особенно если авторы задания заложили некоторый подвох), и не к чему хорошему не приводит.

1.6 Сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчетами.

Теоретическая гипотеза: Число 60 делится без остатка на все целые числа, меньшие его. Экспериментальная проверка: Последовательно проверяем - 60 делится на 1,2,3,4,5,6... возьмем наугад еще несколько чисел - на 10 делится, на 20 делится, на 30 делится. Гипотеза экспериментально подтверждена!

Ценность любого физического исследования обусловлена разумным согласованием теоретических и экспериментальных результатов. Поэтому логичным завершением эксперимента является сравнение полученных данных с результатами теоретического анализа. Трудно ожидать полного соответствия между ними - причины возможных расхождений могут быть самыми различными: погрешности измерений, недостаточная точность методов измерений, влияние побочных факторов, приближенность теоретической модели и т.д. Поэтому необходимо провести качественный анализ полученных результатов и сделать обоснованные выводы типа:

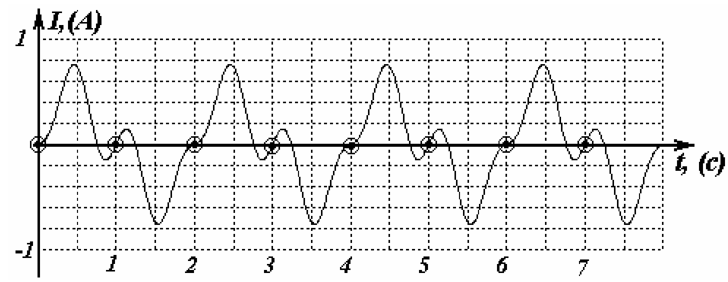
- эксперимент полностью подтверждает теоретические данные *(что маловероятно);*
- экспериментальные данные в пределах погрешности измерений совпадают теоретическими расчетами *(оптимальный вариант);*
- эксперимент качественно подтверждает теорию *(тоже неплохо);*
- экспериментальные данные опровергают теоретическую модель *(победа экспериментатора над силой разума).*

В любом случае полезно указать основные причины возможных расхождений и, возможно, найти способы устранения имеющихся расхождений. Особое внимание следует обратить на экспериментальное обоснование сложных теоретических зависимостей: линейная зависимость проявляется гораздо нагляднее, чем замысловатые теоретические построения.

Приведем пример «полного» соответствия между «теорией и практикой».

В результате теоретического анализа генератора электрических сигналов, получена следующая зависимость силы тока I *(в амперах) от времени* t *(в секундах)* $I = 0{,}5\,sin(\omega t) + 0{,}16\,sin(2\omega t) + 0{,}239\,sin(3\omega t)$*, причем период колебаний точно равен 1 секунде. Результаты экспериментальных измерений представлены в таблице и на графике (на котором также построена теоретическая зависимость)*

$t,(c)$	1,0	2,0	3,0	4,0
$I,(A)$	0,0	0,0	0,0	0,0
$t,(c)$	5,0	6,0	7,0	8,0
$I,(A)$	0,0	0,0	0,0	0,0



Как видно, экспериментальные точки идеально точно легли на теоретическую кривую, что полностью подтверждает теоретические расчеты.

1.7 Оформление работы.

В конце-концов, это просто красиво...
(Из научной дискуссии)

Правила олимпиады не предусматривают каких-либо жестких правил оформления работы. Тем не менее, дадим несколько общих рекомендаций, которые помогут участникам олимпиад достойно завершить выполнение экспериментального задания.

Понятно, что автору работы хочется полностью описать все этапы обдумывания, поиска оптимального пути, все промежуточные попытки и т.д. Однако, не следует стремиться к тому, чтобы работа занимала десятки страниц, так как, во-первых, на это просто может не хватить времени, во-вторых, подробные описания и арифметические выкладки не всегда интересны, наконец, следует просто пожалеть проверяющих, которым предстоит прочитать не только вашу работу.

К сожалению, часто бывает, что участник олимпиады не успевает полностью оформить работу, поэтому советуем приступать к оформлению каждого пункта задания, непосредственно после его выполнения.

Перечислим и кратко охарактеризуем, что должно содержаться в грамотно оформленной работе. Как мы уже отмечали ранее, данная схема является не догмой, а руководством к действию.

Название работы (или одного из пунктов задания).

Формулировка цели не должна дословно повторять название работы, а конкретизировать ее.

В **теоретическом описании** необходимо кратко изложить вывод тех формул, которые в дальнейшем будут использованы как для экспериментальной проверки, так и для расчетов требуемых физических величин. Эта часть работы должна заканчиваться выводами о том, какие физические величины, зависимости должны быть измерены, как будут обрабатываться результаты.

Схема установки обязательно должна присутствовать в работе. Нет необходимости увлекаться «игрой светотени» на изображениях приборов - достаточно указать основные элементы вашей установки, обеспечивающие измерение нужных физических величин. Из схемы должны быть понятны все методики измерения. С особой тщательностью должны быть представлены оптические схемы - с обязательным указанием хода лучей. При проведении электрических измерений необходимо привести принципиальную электрическую схему с использованием стандартных обозначений.

Все результаты измерений, которые вы считаете необходимыми, должны быть представлены в одной или нескольких **Таблицах результатов измерений**. Построение таблиц должно быть логичным и удобочитаемым. Не следует забывать о единицах измерений, которые обязательно должны быть указаны. Обработку результатов прямых измерений удобно также представлять в виде граф таблицы. При этом необходимо указать формулы, по которым проводилась такая обработка. Сейчас большинство расчетов проводится с помощью калькулятора, поэтому нет необходимости выписывать длинные ряды сумм и других громоздких формул.

Описание **обработки результатов косвенных измерений** также должно быть предельно кратким - достаточно записать расчетные формулы (иди сослаться, если они приведены в теоретическом описании) и привести конечные результаты, не забыв при этом их правильно округлить и записать.

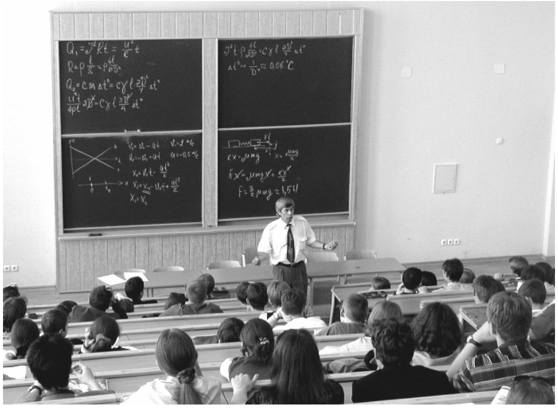
Не забудьте сделать **выводы** из своей великолепно выполненной работы: если цель работы получить численное значение - приведите его: число, погрешность, размерность; если следует получить зависимость - сформулируйте полученный закон, можете дать его обоснование (особенно, если он ближе к Нобелевской премии, чем к вашим теоретическим измышлениям).

1.8 Получение наград.

No comments...

При получении заслуженной медали или диплома ведите себя с чувством собственного достоинства - не выскакивайте на сцену до тех пор, пока не назовут вашу фамилию; не вытягивайте шею, когда на нее водружают заслуженную награду (особенно, если вручающий едва достает вам до пояса); диплом возьмите в левую руку, правую оставьте для равноправного рукопожатия; сдержано поблагодарите за то, что проверяющие профессора сумели понять вашу работу; будьте осторожны на ступеньках, ведущих со сцены в рукоплещущий зал.

Если вы получаете награду как лучший экспериментатор, то можно подняться на сцену в рабочей форме с прожженным рукавом, с мотком проволоки, свисающим из надорванного кармана, розу в петлице можно заменить на крестовую отвертку, трясущиеся руки объяснить последствием удара электрическим током, а треснувшие темные очки - воздействием ультрафиолетового излучения от короткого замыкания, в остальном примерное поведение описано выше.



Часть 2. О некоторых простых, но необходимых вещах.

- Маршал! Почему вы проиграли сражение?
-У меня было тринадцать причин.
- Какие?
- Во-первых, у нас закончились патроны...
- Можете не продолжать!
(диалог Наполеона с одним из маршалов)

Так как олимпиада - соревнование, цель которого победа, то уместно в некоторых местах использовать военную терминологию. Успех в сражении зависит от стратегии, тактики и технического обеспечения. О первых двух составляющих военного искусства мы говорим на протяжении всей книги, сейчас же рассмотрим некоторые простые вопросы, без знания которых не следует обсуждать проблемы «тактики и стратегии» - элементарные технические составляющие выполнения и оформления экспериментальной работы. К слову, эти же навыки могут пригодиться и в других жизненно важных ситуациях, например, при решении задач теоретического тура.

2.1 Таблицы.

Мы уже говорили, что результаты измерений следует представлять в виде таблиц и при необходимости графиков. Позволим себе дать несколько рекомендаций по их оформлению. Начиная с этого пункта, дальнейшее изложение будем проводить с помощью конкретных примеров - перейдем от голого обобщенного умствования к животворящей эмпирии.

Итак, экспериментальная задача (не пугайтесь ее сложности): **измерить объем спичечного коробка.** *Оборудование: коробок, линейка.*

Изучение условия (*линейка деревянная есть, коробок картонный, помятый и пустой, в наличии*), построение теоретической модели (*после несложных преобразований можно получить, что объем коробка рассчитывается по формуле* $V = abc$*, где* a, b, c *- длина, ширина и высота коробка*), разработку экспериментальной установки (*что лучше прикладывать линейку к коробку, или коробок к линейке*), проведение предварительных измерений (*длина линейки больше длины коробка - измерения проводить можно*) опустим, перейдем к непосредственно к результатам измерений, которые представим в Таблице 1.

Таблица 1.

Физическая величина	$a(мм)$	$b(мм)$	$c(мм)$
Результаты измерений	52,0	36,0	14,0
	51,0	37,0	16,0
	51,5	36,0	15,5
среднее	51,5	36,3	15,2
приборная погрешность	0,5	0,5	0,5
случайная погрешность	0,8	1,0	0,8
полная погрешность	0,94	1,1	0,94

Так как коробок старый и помятый, то нет ничего удивительного, что результаты измерений его размеров (проведенные, конечно с разных сторон, и в разных местах) различны. Правила расчета погрешностей рассмотрим позднее, здесь обратим внимание на следующие детали составления таблице:

1) Все графы таблицы подписаны;
2) Для физических величин указаны размерности;
3) Измерения проведены с максимально возможной точностью (половина цены деления), одинаковой для всех результатов;
4) В той же таблице приведены результаты обработки результатов прямых измерений (среднее и погрешности - формулы для их расчета должны быть указаны в тексте).

Несколько забегая вперед, отметим, что значений объема (и тем более, нескольких значений объемов) коробка в таблице нет, эта величина есть результат косвенного измерения, поэтому рассчитывается по средним значениям результатов прямых измерений.

Надеемся, что ваши таблицы будут оформлены не хуже.

2.2 Графики.

Покажем, как следует грамотно оформить график полученной экспериментальной зависимости, решив следующую задачу.

<u>Задача:</u> *Построить зависимость высоты уровня воды в вазе от количества налитой в нее воды.*
Результаты измерений приведены в **Таблице 2** (V - объем налитой воды, h - высота уровня).

Таблица 2.

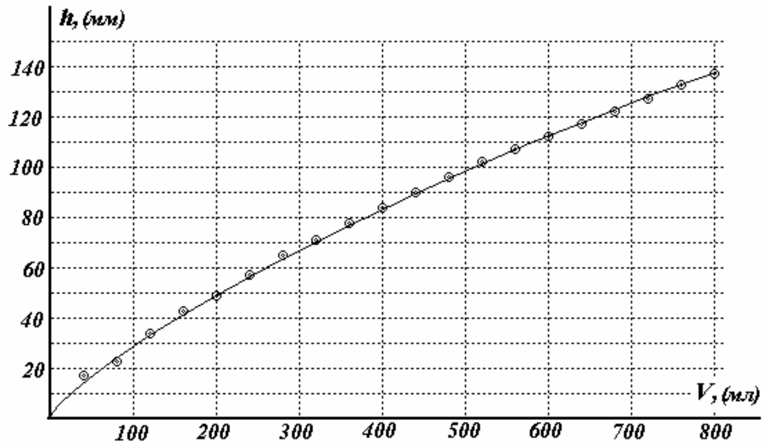
$V \cdot 10^{-2}, (см^3)$	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00
$h, (мм)$	17	23	34	43	49	57	65	71	78	84
$V \cdot 10^{-2}, (см^3)$	4,40	4,80	5,20	5,60	6,00	6,40	6,80	7,20	7,60	8,00
$h, (мм)$	90	96	102	107	112	117	122	127	133	137

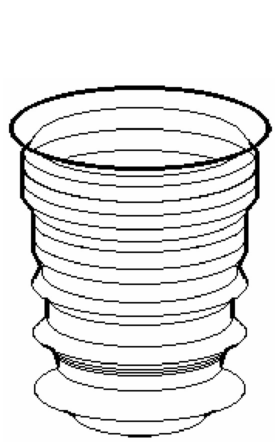
Заметьте, что для экономии места, никто не запрещает расположить таблицу горизонтально, кроме того, общий десятичный множитель вынесен в заголовок строки (допустима также запись $V, (10^2 см^3)$**)** в остальном требования остаются прежними.

Теперь можно приступить к построению графика полученной зависимости. Возможная последовательность выполнения этой задачи следующая:

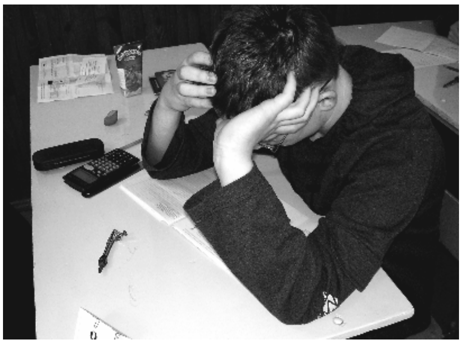
1) Выбираем кусок листа миллиметровой бумаги, размеры которого не меньше, чем половина стандартного тетрадного листа (иначе ваши экспериментальные точки трудно будет найти);
2) Рисуем оси координат, подписываем их и размечаем (не обязательно каждую ось начинать с нуля, масштаб подбирают так, чтобы график занимал большую часть отведенного ему места, а не шел параллельно одной из осей);
3) Наносим экспериментальные точки, каждую из них помечаем (например, обводим кружком), при возможности отмечаем размер погрешности измерений в виде вертикального отрезка прямой;
4) Проводим линию зависимости, которая, по вашему мнению, отражает ход полученной зависимости; если это должна быть прямая, то и рисуйте ее прямой; совсем не обязательно, чтобы линия проходила через все экспериментальные точки - они же известны с некоторой погрешностью.

Пример выполнения этих требований для рассматриваемой задачи показан на рисунке.





Что можно сделать с этими данными? Если надо, то можно попытаться восстановить форму сосуда, с которым проводились измерения. Действительно, изменение высоты уровня жидкости в сосуде (осесимметричном) связано с объемом налитой воды очевидным соотношением $\Delta V = \pi r^2 \Delta h$, где r - радиус сосуда на данной высоте. Из этой формулы можно приблизительно рассчитать значения радиусов на различных высотах, то есть восстановить форму сосуда. Результат таких расчетов показан на следующем рисунке. *Может на самом деле форма сосуда несколько отличается от приведенной, но полученный рисунок реально получен из построенного ранее графика. Разве не очевидно?*



2.3 Запись численного результата.

Полтора землекопа.
(Ответ в учебнике арифметики)

К сожалению, об этой, возможно, самой важной и самой простой процедуре приходится постоянно упоминать - грамотная запись численного результата содержит: численное значение, погрешность, размерность. Конечно, числа, фигурирующие в ответе, должны быть правильно округлены. Простые правила округления:

погрешность округляется до одной значащей цифры (если эта цифра единица, то следует округлять до двух значащих цифр), численное значение результата округляется так, чтобы последний его разряд совпадал с последним разрядом округленной погрешности.

Приведем несколько примеров.
1) В результате расчетов получены следующие значения объема сосуда $V = 234{,}3666 см^3$, с погрешностью $\Delta V = 3{,}235 см^3$. Грамотная запись окончательного результата $V = (234 \pm 3) см^3$.
2) Значение резонансной частоты колебательного контура $\nu = 12645 Гц$, ее погрешность $\Delta\nu = 200 Гц$. Правильно записанное значение погрешности с одной значащей цифрой имеет вид $\Delta\nu = 0{,}2 \cdot 10^3 Гц$ (не запрещено $\Delta\nu = 2 \cdot 10^2 Гц$), поэтому запись результата должна быть в виде
$\nu = (12{,}6 \pm 0{,}2) \cdot 10^3 Гц$.

Обращайте внимание на запись результатов в тех задачах, которые приводятся в этой книге, при наличии ошибок - сообщите о них авторам, вознаграждение гарантируется!

Теперь мы можем закончить выполнение Задачи 1:

Рассчитываем объем коробка по полученной ранее формуле (обратите внимание – используем только средние значения измеренных длин сторон):

$$V = \langle a\rangle\langle b\rangle\langle c\rangle = 51{,}5 \cdot 36{,}3 \cdot 15{,}2 = 28415{,}64\, мм^3 \approx 28{,}42\, см^3.$$

(Это промежуточный результат, поэтому округляем с одной запасной цифрой).

Рассчитываем погрешность косвенного измерения

$$\Delta V = V\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a\rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\langle b\rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\langle ac\rangle}\right)^2} = 28{,}42\sqrt{\left(\frac{0{,}94}{51{,}5}\right)^2 + \left(\frac{1{,}1}{36{,}3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}94}{15{,}2}\right)^2} = 2{,}02 см^3$$

Записываем окончательный результат с учетом правил округления:

$$V = (28 \pm 2) см^3.$$

Для большего «блеска» можно также привести относительную погрешность полученного результата

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2}{28} \approx 7\%$$

2.4 Действия с приближенными числами.

Если от миллиона отнять несколько тысяч,
то все равно останется миллион.
О.Бендер

Все числа, являющиеся результатами измерений, поэтому арифметические действия над ними должны вестись по правилам действий с приближенными числами. Эти правила изучают в школе на уроках арифметики, они подробно описываются в специальной литературе. Поэтому здесь мы их приведем без доказательств, позволив их себе только проиллюстрировать несколькими примерами.

При сложении (вычитании) двух и более чисел результат округляют так, чтобы последний разряд результата совпадал с последним разрядом наименее точного слагаемого. Примеры:

1) $2+2=4$;
2) $259+12{,}3=271$;
3) $6{,}02\cdot10^{23}-5{,}3645\cdot10^{15}=6{,}02\cdot10^{23}$;
4) $100{,}3-100=0$

Заметим, что с точки зрения действия над приближенными числами операция вычитания является самой неблагополучной - разность двух больших и близких чисел может иметь очень большую относительную погрешность, поэтому, по возможности, таких действий следует избегать.

При умножении (делении) в результате оставляют столько значащих цифр, сколько их в наименее точном сомножителе. Примеры:

1) $2\times2=4$;
2) $20\times2=4\cdot10^{1}$;
3) $245\times71=3{,}5$;
4) $1{,}5643\cdot10^{7}/2{,}3098\cdot10^{-3}=0{,}6772\cdot10^{10}$.

При вычислении простейших функций (степенных, тригонометрических, логарифмических, показательных) в результате оставляют столько же значащих цифр, как и у аргумента функции. Это правило является приближенным, при необходимости, в каждом конкретном случае можно разумно оценить погрешность функции, если известна погрешность аргумента. Так при малых относительных погрешностях аргумента можно воспользоваться приближенной формулой $F\left(x_0\pm\Delta x\right)\approx F\left(x_0\right)\pm F'\left(x_0\right)\Delta x$.

2.5 Расчет погрешностей.

Не ошибается только тот,
кто ничего не делает.

Как часто при проверке экспериментальных работ основную часть времени приходится тратить на длинные выкладки расчета погрешностей - доходит до того, что создается впечатление, что кроме погрешностей в работе больше ничего нет.

Сразу подчеркнем, мы глубоко убеждены в том, что **без оценки погрешностей любой экспериментальный результат имеет нулевую ценность.** Однако расчеты погрешностей должны разумно дополнять основную работу - проведение измерений и получение окончательного результата. Здесь мы приведем только краткую сводку порядка и правил расчета погрешностей, а с некоторыми замечаниями по их обоснованию вы можете познакомиться в специальной литературе (если это вам интересно), более того, можете быть уверены в том, что теория погрешностей является настоящей научной теорией, со своими аксиомами, правилами математических выводов, экспериментальным подтверждением и т.д.

Отметим, что приводимая вами погрешность измерений (как и любое иное число, фигурирующее в физике) должна иметь явный смысл. Так, например, записывая длину стола в виде $l = (135 \pm 6) см$, мы ни в коем случае не утверждаем, что длина стола изменяется в пределах от 129 до 141 сантиметра! Смысл погрешности заключается в том, что с некоторой вероятностью (которая называется доверительной) истинное значение длины стола лежит в указанном интервале. Заметьте, не точно лежит в этом интервале, а с некоторой доверительной вероятностью. Иными словами экспериментатор при правильном использовании теории погрешностей оставляет за собой право на ошибку. В серьезных научных исследованиях доверительная вероятность принимается равной 99,5%, в учебных лабораториях принимается доверительная вероятность в 95%. Заметим, что интервал ошибки рассчитывается исходя из заданной доверительной вероятности, а не наоборот. Приводимые ниже правила и позволяют получить величину ошибки для указанной доверительной вероятности.

Если результат измерения x снимается непосредственно с измерительного прибора, то такое измерение называется **прямым**. На результат такого измерения влияет множество факторов: посмотрел на стрелку под другим углом, досталась искривленная линейка, рядом с лабораторией проехал трамвай, сама изменяемая величина по некоторым причинам немного изменилась (например, при измерении диаметра шарика длины разных диаметров могут быть различными) и т.д. Все эти факторы приводят к тому, что результаты измерений различаются, наличие такого разброса требует проведения нескольких измерений, результаты которых обозначим $x_1, x_2, \ldots x_N$.

В качестве окончательного результата прямого измерения принимается среднее арифметическое всех измерений

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N} \tag{1}$$

При прямых измерениях, как правило, учитывают три типа ошибок: приборную, округления, случайную.

Приборная ошибка возникает вследствие несовершенства любого прибора - изготовитель не может (и не обязан) гарантировать абсолютную точность. Поэтому каждый тип прибора имеет гарантированную заводом изготовителем максимальную погрешность. Эти предельные приборные погрешности задается во всевозможных справочниках, краткую выдержку из которых мы и приводим в Приложении 1. Если приборная погрешность не задана в условии задачи (или в описании прибора), то допускается в качестве приборной погрешности использовать половину цены наименьшего деления. Итак, расчет приборной погрешности $\Delta x_{пр.}$ сводится к тому, чтобы вспомнить таблицу, или внимательно посмотреть на шкалу прибора.

В ходе измерений по разным причинам приходится проводить округление результата, в связи с чем, неизбежно появление **ошибки округления** $\Delta x_{окр.}$**.** Величина этой ошибки принимается равной половине интервала округления. Например, если показания амперметра вы округляете до 0,1 А, то погрешность округления принимается равной 0,05А.

Случайная ошибка рассчитывается по формуле (здесь приведены два равносильных выражения, – по какому из них проводить расчеты зависит от индивидуального вкуса)

$$\Delta x_{сл.} = t\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - \langle x \rangle\right)^2}{N(N-1)}} = t\sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\right)}. \tag{2}$$

где обозначено $\langle x^2 \rangle = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}{N}$ - средний квадрат измеряемой величины. В этой формуле t коэффициент (он называется коэффициент Стьюдента), зависящий от числа измерений и от требуемой доверительной вероятности - вам нет необходимости запоминать значения этих коэффициентов - Вы не сильно ошибетесь, полагая $t = 2$, если число ваших измерений больше 5. Вторая часть формулы более удобна для расчетов на калькуляторе. Обратите внимание, что при $N = 1$ погрешность стремится к бесконечности – вот вам математическое обоснование правила – «единичные измерения недопустимы»! Отметим также, что увеличение числа измерений приводит к уменьшению случайной (но не полной!) ошибки, причем при больших N ошибка убывает примерно обратно пропорционально квадратному корню из N: $\Delta x_{сл.} \propto \sqrt{\frac{1}{N}}$. Поэтому для уменьшения ошибки в 10 раз, число измерений следует увеличить в 100 раз. Правда, при выполнении экспериментальных заданий олимпиад вам этот пример не поможет – хватило бы времени на проведение 10 измерений (или хотя бы одного, которое *не допустимо*).

Полная погрешность прямого измерения (объединяющая все три типа ошибок) имеет вид

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{сл.}\right)^2 + \left(\Delta x_{пр.}\right)^2 + \left(\Delta x_{окр.}\right)^2} \qquad (3)$$

На первый взгляд расчет полной погрешности прямого измерения требует значительного времени, однако, при небольшой тренировке и наличии калькулятора[1] эта процедура занимает не более одной минуты. Все эти правила сведены в таблице Приложения 2.

Так как погрешность округляется до одной значащей цифры, в громоздкой формуле (3) можно смело отбрасывать некоторые слагаемые. Так если одна из ошибок более чем в три раза меньше остальных, то ее можно отбрасывать. В конце концов, если вы измерили три раза и результаты отличаются меньше чем на цену деления, то можете смело в качестве полной погрешности принимать половину цены деления! Если же ситуация противоположная – результаты различных измерений отличаются на несколько делений шкалы, то считайте случайную погрешность и принимайте ее за полную. Можно дать и более общее правило: *при расчете погрешностей надо больше думать, тогда считать придется меньше!*

Если окончательный экспериментальный результат получается в ходе вычислений над результатами прямых измерений, то такое измерение называется **косвенным.** Так, например, для определения объема шарика можно измерить с помощью штангенциркуля его диаметр (прямое измерение) и затем по известной формуле рассчитать его объем (косвенное измерение). Если же для измерения объема использовать мензурку с водой, то такое измерение объема будет прямым.

Итак, в общем случае, результат косвенного измерения y является некоторой функцией $y = F(a, b...)$ от результатов прямых измерений: $\langle a \rangle \pm \Delta a, \langle b \rangle \pm \Delta b...$. В качестве окончательного результата используется значение функции, вычисленное при средних значениях результатов прямых измерений

$$\langle y \rangle = F(\langle a \rangle, \langle b \rangle ...).$$

Еще раз подчеркнем - результат косвенного измерения вычисляется **один** раз! Если вы по 5 раз измерили длину, ширину и высоту коробка, то не имеет смысла вычислять 5 значений объема, тем более что возможных комбинаций произведения может быть $5^3 = 125$ вариантов.

Погрешность измерения каждой из величин $a, b...$ вносит некоторую погрешность в расчет величины y, причем величина этой погрешности зависит от вида функции $y = F(a, b...)$. Будем считать, что результаты прямых измерений не зависят друг от друга, тогда можно считать независимыми вклады погрешностей этих величин в результат косвенного измерения. Так как обычно погрешности прямых измерений не слишком велики, то изменение функции y при изменении ее аргумента, например, a, можно рассчитать по формуле

[1] Мы имеем в виду простейший «базарный» калькулятор, выполняющий четыре арифметических действия, операцию извлечения квадратного корня, и имеющий одну ячейку памяти. Более сложные калькуляторы могут автоматически проводить статистическую обработку введенных данных: подсчитывать среднее и выборочную дисперсию (чаще всего обозначается символом σ) на основании которых можно рассчитать все погрешности.

$\left(\Delta y\right)_a = \left(\dfrac{\partial F}{\partial a}\right)\Delta a$, где в скобках стоит частная производная функции F по параметру a. Не пугайтесь такого «страшилища» как частная производная, она вычисляется по тем же правилам, что и обычные производные, только все остальные параметры надо считать постоянными. Для вычисления полной погрешности необходимо сложить «по теореме Пифагора» погрешности, возникающие из-за погрешностей прямых измерений всех параметров

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \ldots} \qquad (4)$$

Часто функция $y = F\left(a, b\ldots\right)$ имеет вид произведения различных степеней от измеряемых напрямую величин $y = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots$. В этом распространенном случае вычисление полной погрешности упрощается

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \ldots} \qquad (5)$$

Вывод этой формулы предоставляем читателям в качестве упражнения.

2.6 Графическая обработка результатов.

Исследование зависимостей между различными варьируемыми переменными, как правило, является основным методом экспериментальных исследований. Поэтому, по возможности, стремитесь проводить такие исследования при выполнении экспериментальных заданий.

Приведем основные правила планирования и реализации экспериментального исследования функциональных зависимостей.

1. **Выбирайте для исследования тот вид зависимости, который наиболее просто и надежно описан теоретически *(если, конечно, в условии четко не указано, какие зависимости необходимо получить).***
2. **Стремитесь провести измерения в максимальном диапазоне варьируемых параметров - полностью используйте возможности вашей экспериментальной установки *(если, конечно, в условии четко не указано, в каком диапазоне необходимо провести измерения).* Кстати, увеличение диапазона изменения варьируемых величин приводит к уменьшению погрешностей рассчитываемых параметров.**
3. **Число измерений должно быть достаточно для построения зависимости, даже для построения линейной зависимости необходимо получить 8-10 экспериментальных точек *(если, конечно, в условии четко не указано, с каким шагом проводить измерения).* Чем больше погрешность отдельного измерения, тем больше экспериментальных точек должно быть получено.**
4. **Если ваша зависимость имеет какие-либо особенности (максимумы, минимумы, перегибы, точки разрыва и т.д.), в районе этих особенностей «густота» экспериментальных точек должна быть больше.**

Наиболее просто обрабатываются линейные зависимости - даже «на глаз» легко отличить прямую от «кривой», а попробуйте отличить участок параболы от какой-нибудь лемнискаты Бернулли. Поэтому даже в том случае, если ваша зависимость нелинейная, постарайтесь соответствующим преобразованием переменных привести ее к линейному виду.

Пусть в рамках своих теоретических построений вы пришли к выводу, что некоторые физические величины связаны функциональной зависимостью $y = F(x)$, причем эта функция содержит набор постоянных параметров $p, q\ldots$, либо подлежащих определению, либо просто неизвестных (следовательно, вид зависимости следует записать в более общем виде $y = F(x, p, q...)$. Практически всегда можно найти такие преобразования к новым переменным[2] $Y(y)$, $X(x)$, так что зависимость между ними линейна. *Подчеркнем, что эти преобразования не должны содержать неизвестных параметров*. Возможные варианты таких преобразований мы будем встречать при рассмотрении

[2] В более общем случае каждая из новых переменных Y, X может зависеть от обеих исходных $Y(x, y)$, $X(x, y)$ - этот случай принципиально не отличается от рассматриваемого здесь.

конкретных задач. Краткая сводка наиболее популярных преобразований приведена в Приложении 2.

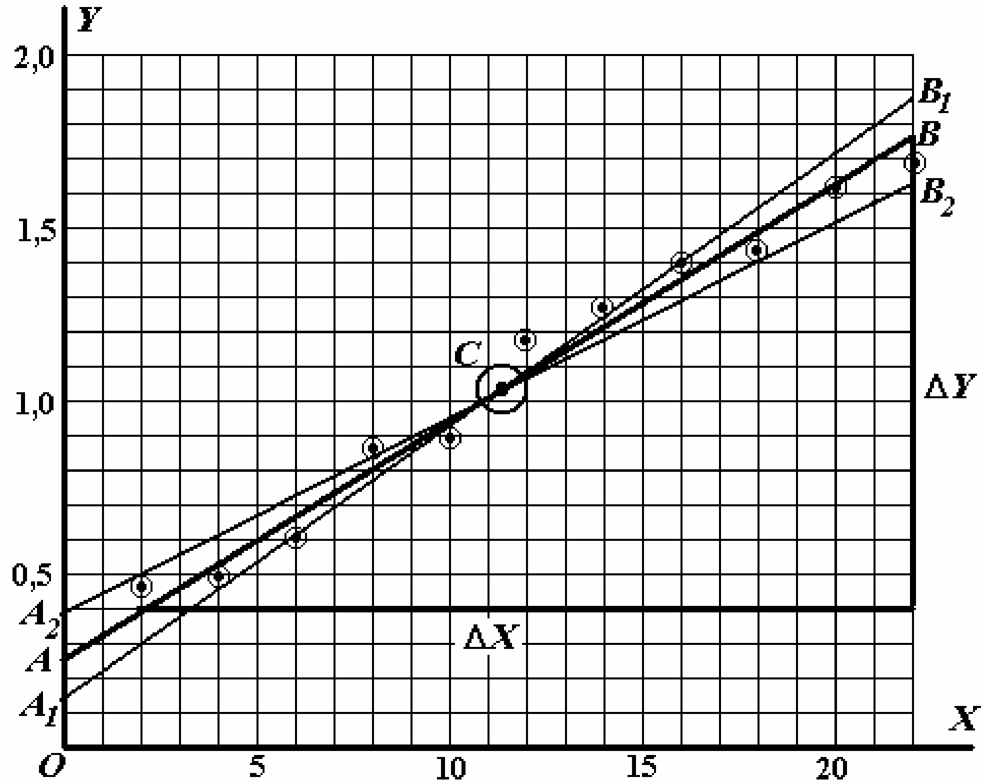
В некоторых случаях требуется определить не все параметры, а только некоторые из них (возможно, что некоторые из них и определить то невозможно). В такой ситуации следует руководствоваться известными правилами экспериментатора:

1. Чем проще модель, тем лучше.

2. Измеряй как можно меньше величин

3. Не можешь измерить, то хотя бы не изменяй (а вдруг сократится).

Итак, будем считать, что преобразования к линейному виду найдены, проведены измерения в нужном количестве, в нужном диапазоне, получены данные (x_i, y_i), $i = 1,2,\ldots N$, и на их основании подсчитаны величины (X_i, Y_i), для которых ваша теория предсказывает линейную зависимость[3] $Y = aX + b$. Следующий шаг - построение графика (в полном соответствии с рассмотренными ранее правилами: выбор масштаба, разметка осей, нанесение экспериментальных точек ...). Ниже, на рисунке показано такое построение для некоторой «придуманной» зависимости. Воспользуемся этим рисунком, чтобы продемонстрировать порядок обработки результатов, целью которого является оценка параметров зависимости и их погрешностей.



Затем очень быстро можно провести определение параметров зависимости «на глаз». Для этого следует провести прямую, которая «ближе всего» лежит к экспериментальным точкам (на нашем рисунке это AB). Что ее построить, можно воспользоваться следующими рекомендациями: выберите «центр масс» имеющихся экспериментальных точек (приближенно ее координаты равны средним между крайними значениями соответствующих координат), на

[3] Конечно, после проведенных преобразований коэффициенты полученной зависимости a, b должны выражаться через параметры исходной зависимости $p, q\ldots$

рисунке это точка C; через эту точку проведите прямую так, чтобы по разные стороны от нее лежало примерно одинаковое число экспериментальных точек. Сразу же определите приближенные значения параметров зависимости:

- величина b есть величина отрезка AO (на рисунке $b \approx 0{,}25$);
- коэффициент a равен отношению $a \approx \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$, причем величину ΔX можно выбрать произвольно (но не слишком малой), так чтобы можно было вычислить отношение «в уме» (на рисунке $\Delta X = 20$, $\Delta Y \approx 1{,}85$, поэтому $a \approx \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} \approx 0{,}09$).

Для оценки погрешностей параметров зависимости нужно провести две «граничные» прямые (примерные): обе проходят через «центр масс», а область между прямыми должна захватывать большинство экспериментальных точек (ближайшие к центру точки могут выходить за выделяемую область). На нашем рисунке это прямые A_1B_1 и A_2B_2. Так же как и для основной, для этих прямых можно определить параметры, которые и будут являться нижними и верхними границами величин a, b.

Настоятельно рекомендуем вам всегда проводить такую предварительную обработку (хотя бы без оценки погрешностей) - времени на это требуется не много, зато вы будете иметь данные, которые не позволят вам грубо ошибиться при более точной аналитической обработке.

2.7 Метод наименьших квадратов.

Для получения максимально достоверных результатов разработано множество серьезных методов обработки экспериментальных данных. Сейчас мы рассмотрим, пожалуй, самый популярный из них - **метод наименьших квадратов**. Впервые он был применен великим немецким математиком К.Гауссом еще в начале XIX века, с тех пор этот метод многократно модифицировался, получил строгое математическое обоснование.

Цель этого метода - получить наилучшие в некотором смысле оценки параметров известной зависимости по экспериментальным данным, содержащим оценки измерений. Пусть известно, что две переменных величины y и x связаны функциональной зависимостью $y = F(x, p, q...)$, включающей неизвестные параметры $p, q...$, оценки которых следует получить. При этом в нашем распоряжении имеется набор экспериментальных данных (x_i, y_i) $i = 1,2...N$. Основная идея метода получения таких оценок заключается в таком выборе параметров зависимости, при котором сумма квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от «теоретических» $F(x_i, p, q...)$ была минимальна. Иными словами, речь идет о поиске минимума суммы

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - F(x_i, p, q...) \right)^2, \qquad (1)$$

которая является функцией от неизвестных параметров $p, q...$ Методы поиска минимума функций хорошо известны. Однако, в общем случае, получающиеся уравнения являются нелинейными, и их решение не всегда может быть получено аналитически.

Заметим, что метод наименьших квадратов в приведенной форме строго обоснован при выполнении следующих условий:

1. Значения x_i известны точно.
2. Абсолютные погрешности величин y_i одинаковы для всех измерений.

Заметим, что этот метод широко используется и в том случае, когда эти условия не выполняются. Однако, по возможности, **следует стремиться к тому, что бы погрешности x_i были меньше погрешностей величин y_i.**

Кстати, это требование является одним из основных при выборе вида преобразований к линейному виду.

Мы не в состоянии рассказать об его разновидностях и, тем более об его строгом обосновании, поэтому ограничимся набором рекомендаций по его применению в простейшем случае анализе линейной зависимости $Y = aX + b$. В этом случае функция (1) имеет вид

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - aX_i - b)^2, \qquad (2)$$

а уравнения для определения минимума этой функции следуют из обычных условий равенства нулю всех производных

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - aX_i - b)X_i = 0$$
$$\frac{\partial S^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - aX_i - b) = 0 .$$

Эта система легко преобразуется к линейному виду

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{N} X_iY_i \\ a\sum_{i=1}^{N} X_i + bN = \sum_{i=1}^{N} Y_i \end{cases} . \qquad (3)$$

Заметьте, что «ужасные» суммы, стоящие в этих уравнениях, являются коэффициентами и могут быть подсчитаны. Решение линейной системы уравнений хорошо знакомо старшеклассникам:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} X_iY_i - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}{N\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}$$
$$. \qquad (4)$$
$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_iY_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)}{N\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}$$

Рассчитывать по этим формулам считать очень неудобно - лучше запомнить формулы пригодные для быстрого расчета неизвестных параметров a и b. Удобнее расчеты разбить на ряд последовательных этапов расчетов параметров, которые к тому же имеют наглядный и легко запоминаемый смысл:

- средние значения, которые определяют центр экспериментальных точек:

$$\langle X\rangle = \frac{\sum X_i}{N}; \qquad \langle Y\rangle = \frac{\sum Y_i}{N};$$

- дисперсии (средний квадрат минус квадрат среднего), корень из дисперсии (называемый стандартным отклонением и считать его не обязательно) определяет разброс переменных

$$S_X^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \langle X\rangle^2; \qquad S_Y^2 = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \langle Y\rangle^2;$$

- коэффициент ковариации[4] (среднее произведение минус произведение средних):

$$R_{XY} = \frac{\sum X_iY_i}{N} - \langle X\rangle\cdot\langle Y\rangle;$$

- искомые коэффициенты выражаются через рассчитанные характеристики по формулам, которые эквивалентны формулам (4):

[4] Это мудреное слово запоминать не обязательно, но при случае можно блеснуть эрудицией

$$a = \frac{R_{XY}}{S_X^2}; \qquad b = \langle Y \rangle - a\langle X \rangle;$$

- погрешности этих величин рассчитываются по формулам[5] (которые здесь даются без вывода):

$$\Delta a = 2\sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{S_Y^2}{S_X^2} - a^2\right)}; \qquad \Delta b = \Delta a\sqrt{S_X^2 + \langle X \rangle^2}.$$

Процедура расчета параметров линейной зависимости и их погрешностей изложена в Приложении 4.

Конкретные примеры применения метода наименьших квадратов будут рассмотрены при решении большинства экспериментальных задач.

Отметим еще одну весьма полезную характеристику: **коэффициент корреляции**, который дает численную характеристику близости экспериментальных точек к линейной зависимости:

$$r = \frac{R_{XY}}{\sqrt{S_x^2 \cdot S_Y^2}}.$$

Эта безразмерная величина может принимать значения от минус до плюс единицы $r \in [-1, +1]$. Если экспериментальные точки точно ложатся на прямую, то коэффициент корреляции равен ± 1 (положительные значения коэффициента корреляции свидетельствуют о возрастании линейной функции, отрицательные – об ее убывании). Чем меньше модуль коэффициента корреляции, тем дальше экспериментальные точки от прямой. Если линеаризация может быть проведена несколькими способами, то следует отдать предпочтение той, для которой коэффициент корреляции выше.

[5] Строго говоря, в формуле для погрешности вместо двойки должен стоять коэффициент Стьюдента, который не слишком заметно отличается от 2, поэтому для школьников допускается использовать это значение.

Часть 3. Основные приемы выполнения экспериментальных заданий.

Продолжим военную аналогию. Если предыдущая глава была посвящена вопросам технического обеспечения победы, то сейчас перейдем к изучению тактических вопросов - методам выполнения небольших экспериментальных задач, которые регулярно являются составной частью настоящих олимпиадных заданий. Некоторые из этих задач вам должны быть знакомы, возможно, вы даже их выполняли как лабораторные работы школьного курса физики, однако мы постараемся подойти к ним с несколько иной точки зрения - проиллюстрировать общую методику выполнения задания, сформулировать некоторые общие подходы, продемонстрировать методы обработки результатов.

Начиная с этой главы, мы вводим сплошную нумерацию задач, их полный список приводится в Приложении 3. В конце условия каждой задачи даны некоторые комментарии и рекомендации по подготовке оборудования к работе. Начало «официального» условия каждой задачи, отмечается логотипом белорусских физических олимпиад.

3.1 Планирование эксперимента.

Бессмысленно проводить измерения, не имея плана эксперимента. Очевидно, что в большинстве случаев работу следует начинать с разработки теоретической части, на основании которой и строится план проведения эксперимента. Проиллюстрируем выполнение этой части решения экспериментальных задач на примерах достаточно простых задач. Причем начнем с одной широко распространенной темы – гидростатическое взвешивание.

Задача 1. Гидростатическое взвешивание.

Иногда приходится сталкиваться с необходимостью измерения массы некоторых предметов, а весов под руками нет. Сейчас вам предлагается решить подобную проблему, используя подручные средства, имеющиеся в каждом доме.

Оборудование: линейка деревянная длиной 40 см, пластилин, кусок мела, мерный стакан с водой, нитки, лезвие бритвы, штатив с держателем.

***Задание*.** Измерьте

а) плотность пластилина;
б) плотность мела;
в) массу деревянной линейки.

Примечания:

1. Кусок мела желательно не мочить - может развалиться.

2. Плотность воды считать равной $\rho_0 = 1{,}0 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$.