Возможные решения задач

9 класс

9-1. «Среднее движение» Получим выражение для средней путевой скорости при равноускоренном движении:

$$\langle v\rangle = \frac{s}{t} = \frac{v_0 t + \frac{at^2}{2}}{t} = v_0 + \frac{a}{2}t, \qquad (1)$$

где v_0 – начальная скорость тела, a – проекция ускорения тела на направление движения. Как видим, зависимость $\langle v\rangle(t)$ должна быть линейной. Излом зависимости $\langle v\rangle(t)$ объясняется тем, что в начальный момент времени ускорение тела и скорость противоположно направлены. Действительно, до момента t_1 тело замедляется, а после – ускоряется. Таким образом, момент времени t_1 является моментом остановки тела.

Очевидно, начальная скорость тела $v_0 = v_1$. Ускорение тела можем найти зная, что в момент времени t_1 тело останавливается:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v_1}{t_1}. \qquad (2)$$

Как видим, проекция ускорения получилась отрицательной, что говорит о том, что начальная скорость тела и ускорение противоположно направлены.

Координата тела (за ось X примем ось, сонаправленную с начальной скоростью тела) в произвольный момент времени τ может быть выражена как

$$x(\tau) = x_0 + v_0\tau + \frac{a\tau^2}{2} = x_0 + v_1\tau - \frac{v_1}{2t_1}\tau^2, \qquad (3)$$

где x_0 – начальная координата тела. Модуль перемещения $\Delta r(\tau)$ тогда равен

$$\Delta r(\tau) = |x(\tau) - x_0| = |v_1\tau - \frac{v_1}{2t_1}\tau^2|. \qquad (4)$$

Ответим теперь на второй вопрос задачи. Здесь необходимо отдельно рассмотреть два случая: $0 \le n \le 1$ и $n > 1$. Если $n > 1$, то имеется только один корень:

$$t_2 = t_1 + \frac{nv_1}{|a|} = t_1 + nt_1 = (1+n)t_1. \qquad (5)$$

Если же $0 \le n \le 1$, то имеется два корня: один, когда тело замедляется, и один, когда оно ускоряется:

$$t_{2(1)} = \frac{nv_1 - v_1}{a} = (1-n)t_1, \qquad (6)$$

$$t_{2(2)} = t_1 + \frac{nv_1}{|a|} = t_1 + nt_1 = (1+n)t_1. \qquad (7)$$

9-2. «Гибкая траектория» Скорость $\vec{v}_3$ камешка относительно берега (неподвижной системы отсчета) по закону сложения скоростей равна векторной сумме скорости $\vec{v}_1$ катера и скорости камешка $\vec{v}_2$ относительно катера

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \qquad (1)$$

Для того, чтобы в неподвижной (лабораторной) системе отсчета, связанной с берегом, движение камешка в процессе полёта было прямолинейным (вертикально вверх, а затем вниз!), необходимо, чтобы вектор $\vec{v}_3$ (Рис. 1) его скорости

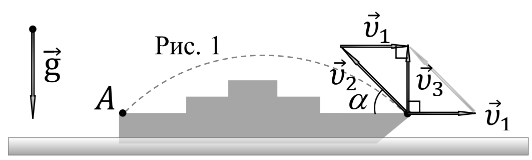


Рис. 1

относительно земли был вертикален (треугольник скоростей $(\vec{v}_2;\ \vec{v}_1;\ -\vec{v}_3)$ – прямоугольный).

Из треугольника скоростей следует, что в системе отсчета, связанной с берегом начальная скорость камешка v_3 (катет прямоугольного треугольника) направлена вертикально вверх и равна

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 - v_1^2}\,. \qquad (2)$$

Для угла бросания α камешка относительно катера опять же из прямоугольного треугольника скоростей

$$v_2 \cos\alpha = v_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{v_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{v_1}{v_2}\right). \qquad (3)$$

Расчет по формуле (3) даёт

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5{,}0}{15}\right) = \{70,52877937\}^{1} = 71^\circ\,. \qquad (4)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

Интересно, что форма траектории камешка разная в различных системах отсчета (подвижной и неподвижной), т.е. является величиной относительной. Действительно, относительно катера – это парабола, тогда как относительно берега – прямая линия (отрезок). Вот уж, действительно, гибкая траектория!

9-3. «Идеальный амперметр» Перестроим электрическую цепь (Рис. 2) и укажем направления электрических токов, существующих в цепи, после чего укажем направления токов в исходной цепи. Запишем первое правило Кирхгофа для узла B цепи:

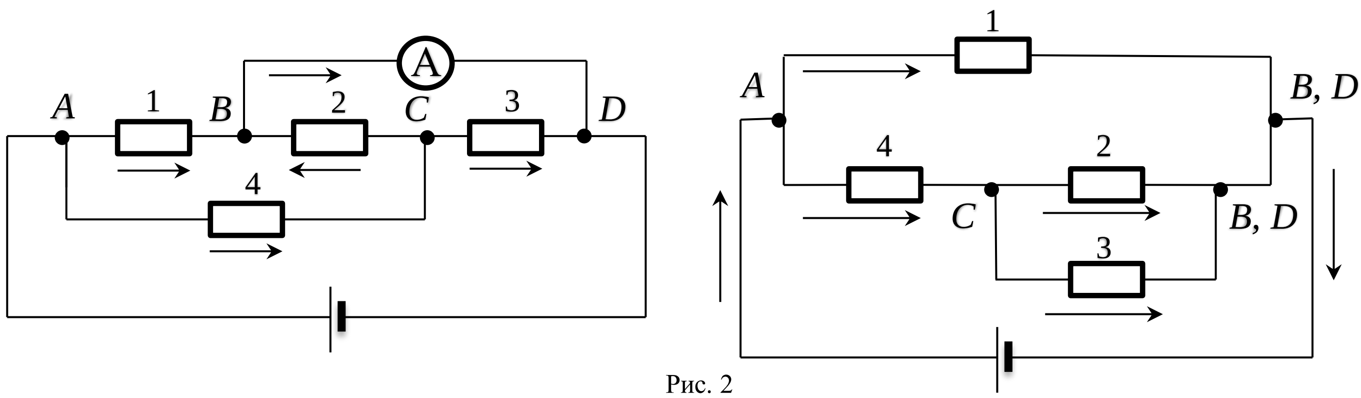


Рис. 2

$$I_1 + I_2 = I_A, \qquad (1)$$

где I_k $(k = \overline{1{,}4})$ – сила электрического тока, протекающего через k-й резистор, I_A – сила электрического тока, протекающего через амперметр. Таким образом, для решения задачи осталось найти величины сил токов, протекающих через первый и второй резисторы.

Найдём I_1, использовав закон Ома для участка цепи и тот факт, что напряжение на первом резисторе $U_1 = U_0$:

[1] – здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

$$I_1 = \frac{U_0}{R}. \qquad (2)$$

Найдём общее сопротивление участка цепи, состоящего из резисторов 4, 2, и 3:

$$R_{234} = R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R. \qquad (3)$$

Тогда сила тока протекающего по участку 234 (ток той же силы протекает и через 4-й резистор):

$$I_{234}(= I_4) = \frac{U_0}{R_{234}} = \frac{2U_0}{3R}. \qquad (4)$$

В силу 1-го правила Кирхгофа для узла C и факта, что сопротивления резисторов 2 и 3 одинаковы, найдём ток в резисторе 2:

$$I_2 = \frac{I_{234}}{2} = \frac{U_0}{3R}. \qquad (5)$$

Наконец, подставим найденные токи I_1 и I_2 (1):

$$I_A = \frac{U_0}{R} + \frac{U_0}{3R} = \frac{4U_0}{3R} = 3{,}2 \text{ А}. \qquad (6)$$

9-4. «Горячая насадка» Механизм работы «дедовского» метода прост и оригинален – «работает» явление теплового расширения (сжатия) – при нагревании линейные размеры тел незначительно увеличиваются, а при охлаждении – незначительно уменьшаются.

Действительно, нагретый до температуры t_1 полый цилиндр A (Рис. 3) немного увеличивает свой внутренний радиус r. Охлажденный до температуры t_2 вал, наоборот, немного уменьшает свой радиус r. Образовавшийся при этом небольшой «зазор в радиусах» (на рисунке не отмечен) позволяет насадить цилиндр на вал достаточно легко.

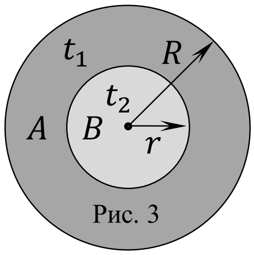


Рис. 3

При остывании цилиндра его внутренний радиус начинает уменьшаться, что приводит к сильному обжатию вала и, соответственно, увеличению механического напряжения между ними.

Кроме того, вал при нагревании будет увеличивать свой радиус, т.е. усиливать эффект прижимания цилиндра к валу. В итоге, сила сжатия цилиндра и вала становится настолько большой, что возникающие силы трения покоя «намертво» фиксируют цилиндр на валу без всякого клеящего средства! Понятно, что для снятия цилиндра с вала следует провести процесс в обратном направлении – вновь нагреть цилиндр и охладить вал.

Пусть высота цилиндра (и длина вала) равна l, тогда его масса m_1 равна

$$m_1 = \rho(\pi R^2 - \pi r^2)l \ , \qquad (1)$$

где ρ – плотность стали.

Соответственно, для массы вала m_2 получаем

$$m_2 = \rho \pi r^2 l \ . \qquad (2)$$

Поскольку (по условию) потерями теплоты в окружающее пространство можно пренебречь, то уравнение теплового баланса примет вид

$$Q^{\swarrow} = Q^{\nearrow} \ , \qquad (3)$$

где $Q^{\swarrow}$ – количество теплоты, полученное холодным валом, а $Q^{\nearrow}$ – количество теплоты, отданное горячим полым цилиндром.

Для нагревания холодного вала можем записать

$$Q^{\swarrow} = cm_2(t^* - t_2) \ , \qquad (4)$$

где c – удельная теплоёмкость стали, m_2 – масса вала.

Аналогично для горячего полого цилиндра

$$Q^{\nearrow} = cm_1(t_1 - t^*) \ , \qquad (5)$$

где m_1 – масса полого цилиндра.

Подставляя (4) и (5) в (3), получим для равновесной температуры системы

$$t^* = \frac{cm_1t_1 + cm_2t_2}{cm_1 + cm_2} = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (6)$$

Из (6) с учетом (1) и (2), найдем

$$t^* = \frac{\rho(\pi R^2 - \pi r^2)lt_1 + \rho\pi r^2 lt_2}{\rho(\pi R^2 - \pi r^2)l + \rho\pi r^2 l} = \frac{(R^2 - r^2)t_1 + r^2t_2}{R^2} = t_1 - \frac{(t_1 - t_2)\,r^2}{R^2}\,. \qquad (7)$$

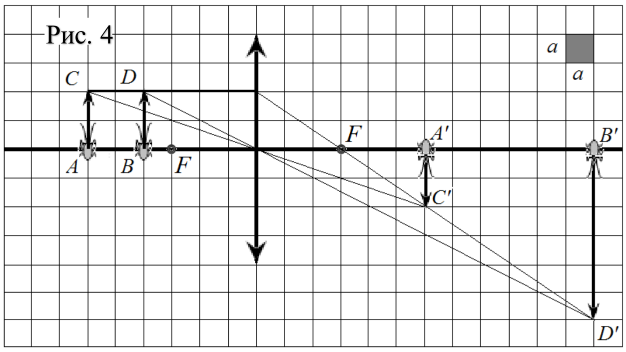
Расчет по формуле (10) с приведенными в условии параметрами даёт значение

$$t^* = \left(250 - \frac{(250 - (-50{,}0))\cdot 10{,}0^2}{15{,}0^2}\right)\,^\circ\text{C} = \{116{,}6666667\} = 117\ ^\circ\text{C}\,. \qquad (8)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до трёх значащих цифр.

9-5. «Оптические гонки» Пусть размер стороны квадратной клеточки на Рис. 4 равен a. Тогда фокусное расстояние линзы будет $F = 3a$, расстояния от жуков до линзы будут равны, соответственно,

$$d_A = 6a = 2F$$
$$d_B = 4a = \frac{4}{3}F\,. \qquad (1)$$



За малый промежуток времени Δt жуки со скоростью υ проползут одинаковые расстояния AC и BD (см. Рис. 6), причем

$$AC = BD = \upsilon\Delta t\,. \qquad (2)$$

Построим изображения $A'C'$ и $B'D'$ отрезков AC и BD в тонкой линзе (см. Рис. 6).

Поскольку жук A находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, то его изображение $A'C'$ также будет на двойном фокусном расстоянии от линзы. При этом увеличение линзы будет равно единице ($\Gamma = \frac{6a}{6a} = 1$), т.е.

$$A'C' = AC\,. \qquad (3)$$

Соответственно, скорость υ_A изображения жука A будет равна скорости υ жуков и направлена «вниз»

$$\upsilon_A = \frac{A'C'}{\Delta t} = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{\upsilon\Delta t}{\Delta t} = \upsilon = 10\ \text{см/с}\,. \qquad (4)$$

Как следует из построения, расстояние от линзы до изображения $B'D'$ жука B равно $12a$. Следовательно, увеличение линзы в этом случае

$$\Gamma = \frac{12a}{4a} = 3 \quad \Longrightarrow \quad B'D' = 3BD. \qquad (5)$$

Повторяя рассуждения, аналогичные (4), найдем скорость изображения υ_B

$$\upsilon_B = \frac{B'D'}{\Delta t} = \frac{3BD}{\Delta t} = \frac{3\upsilon\Delta t}{\Delta t} = \Gamma\cdot\upsilon_A = 3\cdot\upsilon_A = 30\ \text{см/с}\,, \qquad (6)$$

которая также направлена «вниз».

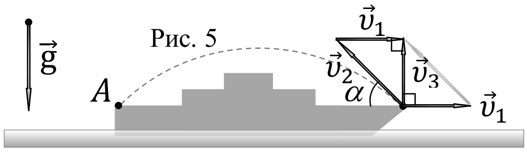
В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр.

10 класс

10-1. «Удачный бросок» Для того, чтобы в неподвижной системе отсчета, связанной с берегом, движение камешка в процессе полёта было прямолинейным (вертикально вверх, а затем вниз!), необходимо, чтобы вектор $\vec{v}_3$ (Рис. 5) его скорости относительно земли

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \qquad (1)$$

был вертикален (треугольник скоростей $(\vec{v}_2;\ \vec{v}_1;\ -\vec{v}_3)$ – прямоугольный).



В этом случае из треугольника скоростей следует, что в неподвижной системе отсчета, связанной с берегом, начальная скорость камешка v_3 (катет прямоугольного треугольника) направлена вертикально вверх и равна

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 - v_1^2}\,. \qquad (2)$$

Соответственно, время движения камешка вверх и вниз в данной системе отсчета равно

$$t = \frac{2v_3}{g} = \frac{2\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g}\,. \qquad (3)$$

Длину катера найдем, зная его скорость и время движения (3)

$$l = v_1 t = \frac{2v_1\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g}\,. \qquad (4)$$

Расчет по формуле (4) даёт ($g = 9{,}81$ м/с^2)

$$l = \left(\frac{2\cdot 5{,}00\cdot\sqrt{15{,}0^2 - 5{,}00^2}}{9{,}81}\right)\text{м} = \{14{,}41604039\} = 14{,}4\ \text{м}\,. \qquad (5)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия и справочные данные) окончательный ответ приводим с точностью до трёх значащих цифр.

Заметим, что решать задачу можно и в подвижной системе отсчета, связанной с катером, движущимся равномерно. В этой системе отсчета скорость катера $\vec{v}_1$ «незаметна» (никак не проявляет себя!) и, соответственно, не влияет на ответ.

Камешек при этом движется по параболе, нужно просто найти дальность l его полёта. Для этого вычислим угол бросания α камешка относительно катера из прямоугольного треугольника скоростей (1)

$$v_2\cos\alpha = v_1 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{v_1}{v_2} \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_2};\quad \alpha = 70{,}53°\,. \qquad (6)$$

Длина катера в этом случае будет равна дальности полёта камешка

$$l = \frac{v_2^2}{g}\ \sin(2\alpha) = \frac{v_2^2}{g}2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{v_2^2}{g}\cdot\frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_2}\cdot\frac{v_1}{v_2} = \frac{2v_1\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g}\,. \qquad (7)$$

Как видим из (4) и (7), решение задачи в различных ИСО (инерциальных системах отсчета: «ИСО-берег» или «ИСО-лодка») приводит к одному и тому же ответу, в полном соответствии с принципом относительности Галилея, который утверждает, что все ИСО «тождественны» в смысле описания механических явлений природы.

Действительно, не смотря на то, что траектории камешка в разных ИСО различные (относительная характеристика) – длина лодки и время движения камня одинаковы (абсолютные характеристики). Интересно, что в механике Эйнштейна (СТО) длина и время также относительны, но в рамках физики 10 класса «господствует» теория сэра Ньютона. ☺

10-2. «Массовые отношения» При вращении системы шарики отклоняются от вертикали так, что нити длинами l_1 и l_2 образуют с ней некоторые углы α и β, соответственно (Рис. 6). При этом шарики равномерно движутся по горизонтальным окружностям, радиусы которых равны r_1 и r_2 , соответственно (см. Рис. 6)

$$r_1 = l_1 \sin\alpha, \quad (1)$$

$$r_2 = l_1 \sin\alpha + l_2 \sin\beta. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона для второго (дальнего) шарика (см. Рис. 8) можем записать

$$Oy: \quad m_2 g = T_2 \cos\beta, \quad (3)$$

$$Ox: \quad m_2 a_2 = m_2 \omega^2 r_2 = T_2 \sin\beta, \quad (4)$$

Аналогично для движения первого (ближнего) шарика (см. Рис. 12)

$$Oy: \quad m_1 g = T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta, \quad (5)$$

$$Ox: \quad m_1 a_1 = m_1 \omega^2 r_1 = T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta, \quad (6)$$

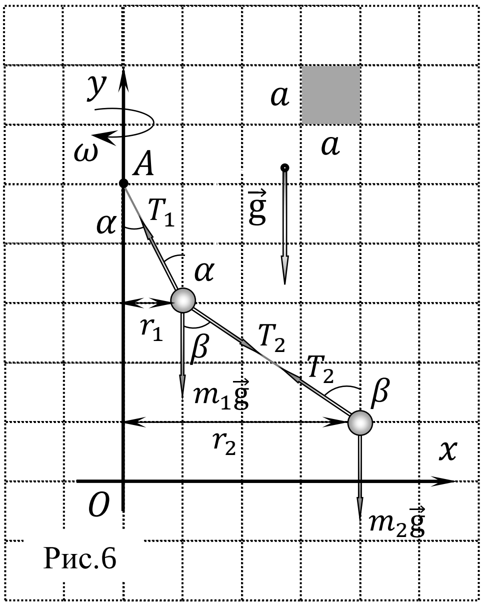


Рис.6

Из (3) найдем силу натяжения T_2 нижней нити

$$T_2 = \frac{m_2 g}{\cos\beta}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) получим выражение для силы натяжения T_1 верхней нити

$$T_1 = \frac{(m_1+m_2)g}{\cos\alpha}. \quad (8)$$

Используя (8) и (7), получим

$$\eta = \frac{T_1}{T_2} = \frac{(m_1+m_2)g}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{m_2 g} = \frac{(m_1+m_2)}{m_2} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = (n+1)\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \quad (9)$$

Из (9) находим искомую величину

$$n = \eta \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - 1. \quad (10)$$

Из рисунка, используя теорему Пифагора, находим необходимые параметры (a – длина стороны масштабной клеточки (см. Рис. 8)):

$$\cos\alpha = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \ \cos\beta = \frac{2a}{\sqrt{13}a} = \frac{2}{\sqrt{13}}. \quad (11)$$

Расчет по (10) с необходимой точностью даёт

$$n = 5{,}58\sqrt{\frac{13}{5}} - 1 = \{7{,}997479647\} = 8{,}00 \quad (10)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до трёх значащих цифр.

10-3. «Шайба и горка» Запишем второй закон Ньютона для шайбы, въезжающей на горку, в проекции на ось y (Рис. 7):

$$N - mg\cos\alpha = -ma, \quad (1)$$

где модуль центростремительного ускорения a определяется по известному соотношению

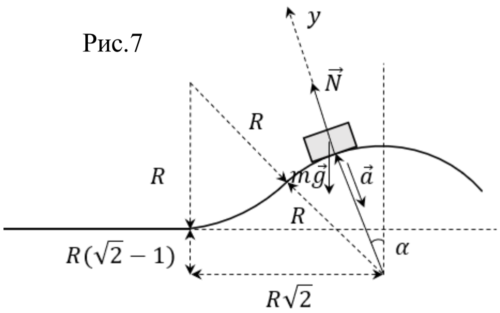
$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (2)$$

v – модуль скорости шайбы в рассматриваемой точке траектории. Математическим условием отрыва шайбы от поверхности горки является выражение $N \leq 0$, или из (1) и (2)

$$mg\cos\alpha - m\frac{v^2}{R} \le 0. \qquad (3)$$

Очевидно, отрыв от горки может произойти только на выпуклой части горки, т.е. на участке, соответствующему четверти окружности. Действительно, при движении по вогнутой поверхности сила нормальной реакции увеличивается в сравнении с плоской поверхностью, а по выпуклой – уменьшается. В силу этого будем рассматривать только на выпуклой поверхности. Высота шайбы h над уровнем земли может быть выражена через угол α следующим образом:

Рис.7



$$h = R(1 + \cos\alpha - \sqrt{2}). \qquad (4)$$

Запишем закон сохранения механической энергии шайбы:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 + \cos\alpha - \sqrt{2}). \qquad (5)$$

Минимальная скорость v_0, необходимая для преодоления горки, такова, что тело, добравшись до наивысшей точки горки, остановится. Подставляя $v = 0$ и $\alpha = 0$ в (5), получим

$$v_0^{min} = \sqrt{2gR(2 - \sqrt{2})}. \qquad (6)$$

Проверим, что при скорости v_0^{min} отрыва от горки не произойдёт. Для этого выразим из (5) v^2 при $v_0 = v_0^{min}$ и подставим в (3):

$$\begin{gathered} v^2 = 2gR(1-\cos\alpha) \\ \cos\alpha \le \frac{2}{3} \end{gathered}. \qquad (7)$$

Последнее условие можно переписать в виде $48° \le \alpha \le 90°$. Поскольку для выпуклого участка окружности $-45° \le \alpha \le 45°$, отрыва не произойдёт.

Для того, чтобы ответить на второй вопрос задачи, выразим из (5) v^2 и подставим в условие (3):

$$\begin{gathered} v^2 = v_0^2 - 2gR(1+\cos\alpha-\sqrt{2}) \\ \cos\alpha \le \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2\sqrt{2}-2}{3} \end{gathered}. \qquad (8)$$

Из (8) очевидно, что отрыв, если и будет происходить, то только при угле $\alpha = 45°$. Минимальной скорость v_0 будет тогда, когда в (8) выполняется равенство. Т.о. из равенства (8) найдём v_0 при $\alpha = 45°$:

$$v_0 = \sqrt{gR\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}. \qquad (9)$$

10-4. «Подвижное изображение» Согласно формуле тонкой линзы, расстояние d от жучка до линзы и расстояние f от линзы до его действительного изображения связаны соотношением (Рис. 8)

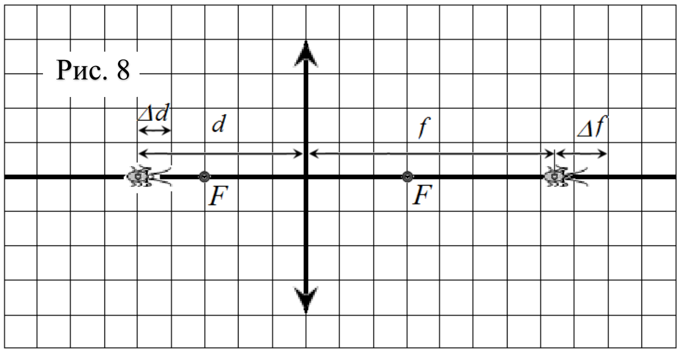
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \qquad (1)$$

где F – фокусное расстояние тонкой собирающей линзы.

Из (1) найдем

$$f = \frac{dF}{d-F} = 2{,}5\,F\,. \qquad (2)$$

Пусть за малый промежуток времени Δt жучок переместился на малое расстояние Δd к линзе, а его изображение сместилось на Δf от линзы. Тогда скорости жучка и изображения по определению будут равны



$$\upsilon = \frac{\Delta d}{\Delta t}\,,\ u = \frac{\Delta f}{\Delta t}\,. \qquad (3)$$

Согласно формуле тонкой линзы для нового положения жучка (см. Рис. 10)

$$\frac{1}{d-\Delta d} + \frac{1}{f+\Delta f} = \frac{1}{F}\,. \qquad (4)$$

Используя математическую подсказку из условия, перепишем выражение в виде

$$\frac{1}{d-\Delta d} = \frac{1}{d(1-\frac{\Delta d}{d})} \approx \frac{1}{d}\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right) = \frac{1}{d} + \frac{\Delta d}{d^2}\,. \qquad (5)$$

Аналогично

$$\frac{1}{f+\Delta f} = \frac{1}{f(1+\frac{\Delta f}{f})} \approx \frac{1}{f}\left(1-\frac{\Delta f}{f}\right) = \frac{1}{f} - \frac{\Delta f}{f^2}\,. \qquad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим равенство

$$\frac{1}{d} + \frac{\Delta d}{d^2} + \frac{1}{f} - \frac{\Delta f}{f^2} = \frac{1}{F}\,, \qquad (7)$$

которое, с учетом (1), можно переписать в виде

$$\frac{\Delta d}{d^2} = \frac{\Delta f}{f^2}\,. \qquad (8)$$

Разделив обе части (8) на Δt, найдем искомое значение скорости изображения жучка

$$u = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f^2}{d^2}\cdot\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f^2}{d^2}\upsilon\,. \qquad (9)$$

Окончательно, с учётом (2), получим, что действительное изображение жучка движется в направлении «от линзы» со скоростью

$$u = \frac{\left(\frac{dF}{d-F}\right)^2}{d^2}\upsilon = \frac{F^2}{(d-F)^2}\upsilon\,. \qquad (10)$$

Расчет по формуле (10) даёт

$$u = \frac{F^2}{(d-F)^2}\upsilon = \frac{9}{4}\upsilon = 9{,}0\ \text{см/с}\,. \qquad (11)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр.

10-5. «Линейный процесс» Поскольку давление пропорционально объёму, можем выразить объём через давление в соответствии с

$$V = ap, \qquad (1)$$

где a – некоторая постоянная. Обозначим объём и давление в i-й за V_i и p_i соответственно. Тогда

$$\begin{cases} V_1 = ap_1 \\ V_2 = a(p_1-\Delta p)\,, \\ V_3 = a(p_1-2\Delta p) \end{cases} \qquad (2)$$

где Δp – изменение давления при переходе из состояния 1 в 2 и из 2 в 3. Для трёх состояний запишем уравнение Менделеева-Клапейрона с учётом соотношений (2):

$$\begin{cases} ap_1^2 = \nu RT_1 \\ a(p_1 - \Delta p)^2 = \nu RT_2 \\ a(p_1 - 2\Delta p)^2 = \nu RT_3 \end{cases}. \qquad (3)$$

В (3) разделим второе уравнение на первое и третье на первое:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_1}\right)^2 = \frac{T_2}{T_1} \\ \left(1 - 2\frac{\Delta p}{p_1}\right)^2 = \frac{T_3}{T_1} \end{cases}. \qquad (4)$$

Выражая из первого уравнения в (4) $\frac{\Delta p}{p_1}$ и подставляя во второе, получим

$$T_3 = \left(2\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}\right)^2. \qquad (5)$$

11 класс.

11-1. «Ускорение ускорения» При движении кольца по горизонтальной поверхности скорость $\vec{v}$ любой его точки можно найти как сумму скоростей $\vec{v}_1$ поступательного (вместе с центром) и вращательного $\vec{v}_2$ (вокруг центра) движений

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \ . \qquad (1)$$

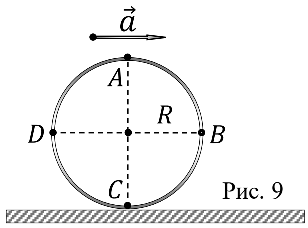


Рис. 9

Причем, при движении без проскальзывания точка C кольца покоится относительно земли (Рис. 9), следовательно, модули этих скоростей, направленных в противоположные стороны, должны быть одинаковыми

$$v_1 = v_2 \ . \qquad (2)$$

Поскольку кольцо ускоряется, то скорость v_1 его поступательного движения (скорость точки O) вместе со скоростью v_2 увеличивается прямо пропорционально времени движения

$$v_1 = v_2 = at \ . \qquad (3)$$

По определению ускорение материальной точки равно (для малого Δt)

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \ . \qquad (4)$$

Как следует из (4), для нахождения искомого ускорения $\vec{a}$ любой точки кольца следует сложить (векторно!) её ускорения для поступательного $\vec{a}_1$ и вращательного $\vec{a}_2$ движений.

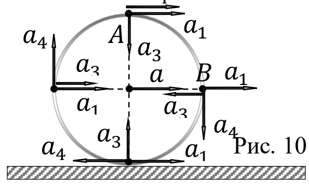


Рис. 10

Для поступательного движения все предельно просто – ускорения $\vec{a}_1$ всех точек кольца одинаковы (как по модулю, так и по направлению!) и равны ускорению центра кольца (Рис. 10)

$$\vec{a}_1 = \vec{a} \ . \qquad (5)$$

Для вычисления ускорения $\vec{a}_2$ материальной точки при неравномерном вращательном движении следует учесть как её центростремительное (нормальное) ускорение $\vec{a}_3$, направленное вдоль радиуса, так и касательное (тангенциальное) ускорение $\vec{a}_4$, которое перпендикулярно центростремительному, и направлено по касательной в данной точке (см. Рис. 13)

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4 \ . \qquad (10)$$

Если мгновенная скорость центра кольца v_1, то для модуля центростремительного ускорения в данный момент времени имеем

$$a_3 = \frac{v_1^2}{R}\,. \tag{7}$$

Кроме того, из (2) следует, что при движении кольца без проскальзывания касательное ускорение a_4 точки C, направленное влево (см. Рис. 10), равно по модулю ускорению центра кольца, направленному вправо

$$a_4 = a_1 = a\,. \tag{8}$$

Направления всех ускорений изображены на рисунке 10.

Таким образом, искомое ускорение $\vec{a}_B$ точки B определяется векторной суммой

$$\vec{a}_B = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4\,. \tag{9}$$

Из рисунка 10, используя теорему Пифагора, находим, что полное ускорение точки B равно

$$a_B = \sqrt{a_4^2 + (a_1 - a_3)^2} = \sqrt{a_4^2 + \left(a_1 - \frac{v_1^2}{R}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{v_1^2}{R}\right)^2}\,. \tag{10}$$

С учётом (3) выражение (10) примет вид

$$a_B = a\sqrt{1 + \left(1 - \frac{at^2}{R}\right)^2}\,. \tag{11}$$

Поскольку требуется найти вектор ускорения, то, помимо модуля вектора, необходимо указать его направление, т.е. найти, например, угол α, образованный данным вектором с горизонтом.

Из прямоугольного треугольника ускорений (см. Рис. 10), найдем

$$\tan\alpha = \frac{a_4}{a_1 - a_3} = \frac{a}{a - \frac{v^2}{R}} = \frac{R}{R - at^2}\,. \tag{12}$$

Таким образом, ускорение $\vec{a}_B$ точки B кольца будет вертикально (направлено вниз) при выполнении условия

$$\alpha = 90^\circ \;\Rightarrow\; \tan\alpha = \frac{a_4}{a_1 - a_3} = \infty \;\Rightarrow\; a_1 = a = a_3\,. \tag{13}$$

Из (12) следует, что это произойдет в момент времени

$$a = a_3 = \frac{v^2}{R} = \frac{(at)^2}{R} \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{R}{a}} = 0{,}64\ \text{с}\,. \tag{14}$$

Искомое ускорение $\vec{a}_A$ точки A определяется векторной суммой

$$\vec{a}_A = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4\,. \tag{15}$$

Используя теорему Пифагора (Рис. 13), находим, что полное ускорение a_A точки A равно по модулю

$$a_A = \sqrt{(a_1 + a_4)^2 + a_3^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}\,. \tag{16}$$

С учетом (13) получим

$$a_A = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{aR}{R}\right)^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}\,. \tag{17}$$

Расчет производим с точностью до двух значащих цифр

$$a_A = 2{,}4 \cdot \sqrt{5}\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \{5{,}366563146\} = 5{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,. \tag{18}$$

Поскольку требуется найти вектор ускорения, то, помимо модуля вектора, необходимо указать его направление, т.е. найти, например, угол α, образованный данным вектором с горизонтом.

Для точки A из прямоугольного треугольника ускорений (см. Рис. 10), найдем

$$\tan\alpha = \frac{a_3}{a_1 + a_4} = \frac{a}{a + a} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; \alpha = \{26{,}56505118\} = 27^\circ\,. \tag{19}$$

Как следует из (19) вектор $\vec{a}_A$ в рассматриваемый момент времени направлен «вперед и вниз».

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр.

11-2. «Двойной конический маятник» При вращении системы шарики отклоняются от вертикали так, что нити длинами l_1 и l_2 образуют с ней некоторые углы α и β, соответственно (Рис. 11). При этом шарики равномерно движутся по горизонтальным окружностям, радиусы которых равны r_1 и r_2, соответственно (см. Рис. 14)

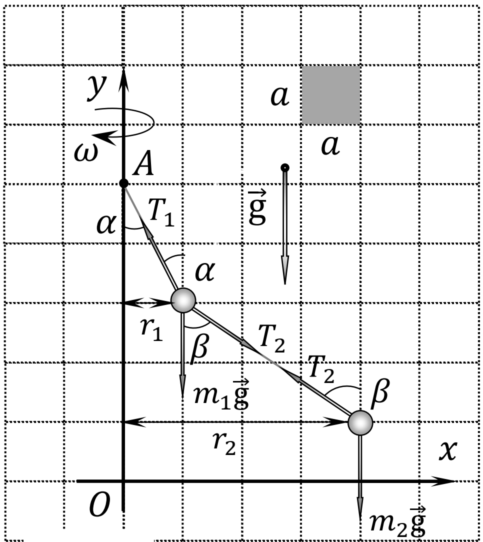


Рис.11

$$r_1 = l_1 \sin\alpha, \quad (1)$$

$$r_2 = l_1 \sin\alpha + l_2 \sin\beta. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона для второго (дальнего) шарика (см. Рис. 12) можем записать

$$Oy: \quad m_2 \text{g} = T_2 \cos\beta, \quad (3)$$

$$Ox: \quad m_2 a_2 = m_2 \omega^2 r_2 = T_2 \sin\beta, \quad (4)$$

Аналогично для движения первого (ближнего) шарика (см. Рис. 14)

$$Oy: \quad m_1 \text{g} = T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta, \quad (5)$$

$$Ox: \quad m_1 a_1 = m_1 \omega^2 r_1 = T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta, \quad (6)$$

Из (3) найдем силу T_2 натяжения нижней нити

$$T_2 = \frac{m_2 \text{g}}{\cos\beta}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) получим выражение для силы натяжения T_1 верхней нити

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2)\text{g}}{\cos\alpha}. \quad (8)$$

Используя (8), (6) и (4), придём к равенству

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)\text{g} \tan\alpha}{m_1 r_1 + m_2 r_2}. \quad (9)$$

Аналогично выразим ω^2 из (4) с учетом (7)

$$\omega^2 = \frac{m_2 \text{g} \tan\beta}{m_2 r_2} = \frac{\text{g} \tan\beta}{r_2}. \quad (10)$$

Приравнивая выражения (9) и (10) для ω^2 получаем равенство

$$\frac{(m_1 + m_2)\text{g} \tan\alpha}{m_1 r_1 + m_2 r_2} = \frac{\text{g} \tan\beta}{r_2}, \quad (11)$$

из которого после преобразований найдем

$$m_2 = \frac{m_1 (r_2 \tan\alpha - r_1 \tan\beta)}{r_2 (\tan\beta - \tan\alpha)}. \quad (12)$$

Из рисунка 11 находим необходимые параметры (a – длина стороны масштабной клеточки):

$$r_1 = a; \; r_2 = 4a; \; \tan\alpha = \frac{1}{2}; \; \tan\beta = \frac{3}{2}. \quad (13)$$

Расчет по (12) с необходимой точностью даёт

$$m_2 = \frac{80 \cdot (4 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 1{,}5)}{4(1{,}5 - 0{,}5)} \text{ (г)} = 10 \text{ г}. \quad (14)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

11-3. «Заряженный маятник» Без ограничения общности будем считать, что заряд тела маятника положительный. Период колебаний в отсутствие электростатического поля определяется выражением

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ , \qquad (1)$$

где l – длина математического маятника.

Найдём периоды колебаний заряженного математического маятника, внесённого в вертикальное однородное электростатическое поле. Обозначим искомые периоды T_- и T_+, если вектор напряжённости поля направлен вверх или вниз соответственно. Начала осей X и Y совместим с нижним положением центра масс груза маятника (Рис. 12). Запишем выражение для полной энергии маятника, остающейся постоянной в процессе колебаний:

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + (mg \mp qE)y = const\ , \qquad (2)$$

где знак «$-$» соответствует случаю, когда вектор $\vec{E}$ направлен вверх, а знак «$+$» – вниз.

В силу того, что груз маятника движется по окружности, можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} y = l(1-\cos\alpha) \\ x = l\sin\alpha \\ v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha \end{cases}, \qquad (3)$$

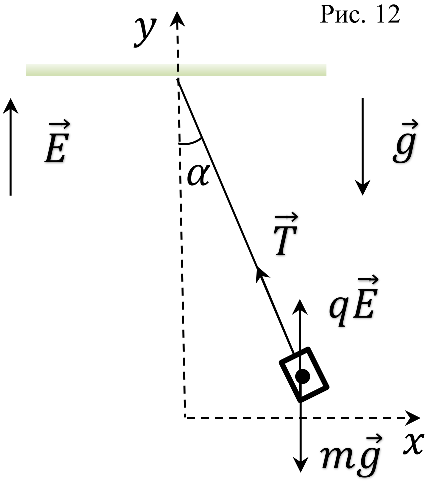


Рис. 12

где v – модуль скорости груза маятника. Учитывая малость колебаний ($\alpha \ll 1$), можем упростить (3):

$$\begin{cases} y = l\frac{\alpha^2}{2} \\ x = l\alpha \\ v_x = v(1-\frac{\alpha^2}{2}) \approx v \\ v_y = v\alpha \end{cases}. \qquad (4)$$

Проделав некоторые математические преобразования в системе условий (4), нетрудно получить следующие соотношения:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2l} \\ v_y = v_x\alpha \end{cases}. \qquad (5)$$

Подставим (5) в (2) и пренебрежём α^2:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}\frac{(mg\mp qE)}{l}x^2 = const\ . \qquad (6)$$

Приведём (6) к виду, соответствующему уравнению гармонических колебаний:

$$v_x^2 + \frac{(mg\mp qE)}{ml}x^2 = const\ . \qquad (7)$$

Из (7) очевидно, что периоды колебаний $T_\pm$ определяются следующими соотношениями:

$$T_\pm = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg\pm qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l}{g}}{1\pm\frac{qE}{mg}}}\ . \qquad (8)$$

Поскольку при включении электростатического поля период колебаний возрастает ($T_2 > T_1$), $T_2 = T_-$ а $T_3 = T_+$. Два последних соотношения вместе с (1) является системой, решив которую можно получить T_3 (при решении удобно промежуточным действием выразить параметр $\frac{mg}{qE}$):

$$T_3 = \frac{T_1}{\sqrt{2-\frac{T_1^2}{T_2^2}}} \approx 0{,}76 \text{ с.} \tag{9}$$

При решении задачи можно было также воспользоваться динамическим методом нахождения периода колебаний вместо энергетического (Рис. 12). Для этого необходимо записать второй закон Ньютона, пренебрегая в силу малости колебаний проекцией ускорения a_y:

$$\begin{cases} -T\sin\alpha = ma_x \\ T\cos\alpha - mg \pm qE = ma_y \approx 0 \end{cases} \tag{10}$$

Далее пользуясь приближёнными формулами $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1$ и выражением $\alpha = \frac{x}{l}$, непосредственно следующим из (4), нетрудно из (10) получить

$$\begin{cases} T = mg \mp qE \\ a_x + \frac{mg \mp qE}{ml} x = 0 \end{cases} \tag{11}$$

что также приводит к выражениям (8) для периодов колебаний.

Ещё один метод решения задачи – метод аналогий. При наличии электростатического поля можно ввести «эффективное» ускорение свободного падения равное

$$g_{\pm} = g \pm \frac{qE}{m}, \tag{12}$$

после чего можно сразу записать соотношение (8) и прийти к правильному ответу.

11-4. «Велосипедный насос»

А. Из уравнения Менделеева-Клапейрона найдём начальное количество воздуха, находящегося в шине:

$$\nu_0 = \frac{p_0 V_ш}{RT_0}. \tag{1}$$

Количество воздуха, поступающее под поршень насоса в каждом цикле накачки находим аналогично (1):

$$\Delta\nu = \frac{p_0 V_н}{RT_0}. \tag{2}$$

Спустя k циклов накачки количество воздуха в шине определяется соотношением

$$\nu_k = \nu_0 + k\Delta\nu = \frac{p_0}{RT_0}(V_ш + kV_н). \tag{3}$$

Термодинамические параметры воздуха, находящегося в шине, подчиняются уравнению Менделеева-Клапейрона (4):

$$pV_ш = \nu_k RT_0. \tag{4}$$

Здесь мы учли, что объём шины в процессе накачки не меняется вследствие её нерастяжимости. Подставляя в (4) выражение (3), получим

$$pV_ш = p_0(V_ш + kV_н), \tag{5}$$

после чего выразим k:

$$k = \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)\frac{V_ш}{V_н} = 59{,}2. \tag{6}$$

Полученный результат необходимо округлить к большему целому значению: $k = 60$.

Б. Выразим давление в шине p_k после k-го цикла накачки из (5):

$$p_k = p_0\left(1 + k\frac{V_н}{V_ш}\right), \tag{7}$$

Для того, чтобы воздух начал поступать в шину на 10-м цикле накачки, необходимо, чтобы давление воздуха в насосе превысило p_9. В силу того, что процесс сжатия газа в насосе является изотермическим, можем записать

$$p_0 S l = p_9 S(l - x), \qquad (8)$$

где S – площадь поршня насоса, x – искомое расстояние. Осталось только выразить x:

$$x = l\left(1 - \frac{p_0}{p_9}\right) = l\left(1 - \frac{1}{1+9\frac{V_н}{V_ш}}\right) = l\frac{9\frac{V_н}{V_ш}}{1+9\frac{V_н}{V_ш}} \approx 18{,}6 \text{ см}. \qquad (9)$$

11-5. «Тепло резистору» До замыкания ключа K в конденсаторе от внешнего источника запасена энергия электростатического поля

$$W_C = \frac{CU^2}{2}. \qquad (1)$$

После замыкания ключа K (Рис. 13) по цепи пойдет электрический ток, сила которого будет нелинейно уменьшаться со временем от максимального значения I_{max} до нуля по мере разрядки конденсатора. Пусть в некоторый момент сила тока через резистор R_1 равна I_1. Поскольку резисторы R_2 и R_3 включены параллельно, то для них справедлива система уравнений

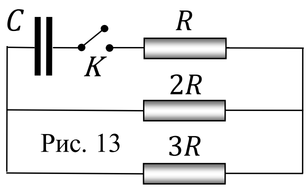


Рис. 13

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2 R_2 = I_3 R_3 \end{cases}, \qquad (2)$$

где I_2 и I_3 – силы токов через резисторы R_2 и R_3 соответственно. Из системы (2) получаем

$$\begin{cases} I_2 = \frac{R_3}{R_2+R_3} I_1 \\ I_3 = \frac{R_2}{R_2+R_3} I_1 \end{cases}. \qquad (3)$$

Согласно (3) I_2 и I_3 прямо пропорциональны силе тока I_1.

Запишем закон Джоуля – Ленца для каждого из резисторов для малого промежутка времени Δt. Тогда количество теплоты Q_1, выделившейся на первом резисторе

$$Q_1 = I_1^2 R_1 \Delta t, \qquad (4)$$

на втором

$$Q_2 = I_2^2 R_2 \Delta t = (3) = \left(\frac{R_3}{R_2+R_3} I_1\right)^2 R_2 \Delta t = I_1^2 \frac{R_3^2 R_2}{(R_2+R_3)^2} \Delta t, \qquad (5)$$

на третьем

$$Q_3 = I_3^2 R_3 \Delta t = (3) = \left(\frac{R_2}{R_2+R_3} I_1\right)^2 R_3 \Delta t = I_1^2 \frac{R_2^2 R_3}{(R_2+R_3)^2} \Delta t. \qquad (6)$$

Как следует из (4) – (6), полученные значения выделившихся теплот относятся между собой как

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = R_1 : \frac{R_3^2 R_2}{(R_2+R_3)^2} : \frac{R_2^2 R_3}{(R_2+R_3)^2}. \qquad (7)$$

Кроме того, поскольку выделение теплоты происходит за счет энергии, запасенной в конденсаторе, то, согласно закону сохранения энергии, можем записать

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = W_C = \frac{CU^2}{2}. \qquad (8)$$

Решая систему (7) – (8), получим

$$Q_3 = \frac{\frac{R_2^2 R_3}{(R_2+R_3)^2}}{R_1 + \frac{R_3^2 R_2}{(R_2+R_3)^2} + \frac{R_2^2 R_3}{(R_2+R_3)^2}} W_C. \qquad (9)$$

После преобразований (9) примет вид

$$Q_3 = \frac{R_2^2 R_3}{(R_2+R_3)(R_1R_2+R_1R_3+R_3R_2)} \frac{CU^2}{2} . \qquad (10)$$

С учётом значений сопротивлений резисторов $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$ выражение (10) принимает вид

$$Q_3 = \frac{4R^2 \cdot 3R}{(2R+3R)(R\cdot 2R+R\cdot 3R+3R\cdot 2R)} \frac{CU^2}{2} = \frac{12}{55}\frac{CU^2}{2} = \frac{6}{55} CU^2 . \qquad (11)$$

Расчет по формуле (11) дает

$$Q_3 = \frac{6}{55} \times 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2(\text{Дж}) = \{6{,}981818182 \cdot 10^{-3}\} = 7{,}0 \text{ мДж} . \qquad (12)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные расчёты приводим с точностью до двух значащих цифр, поскольку две значащие цифры содержатся во всех данных условия.

Используя (7) и (11) несложно вычислить и оставшиеся теплоты Q_1 и Q_2 (от школьников не требуется, но если кто все же нашел их – «бонусный» балл не жалейте!)

$$Q_1 = \frac{25}{12} Q_3 = \frac{25}{55}\frac{CU^2}{2} . \qquad (13)$$

$$Q_2 = \frac{3}{2} Q_3 = \frac{18}{55}\frac{CU^2}{2} . \qquad (14)$$

Как и следовало ожидать, максимальное количество теплоты в данной схеме при разрядке конденсатора выделилось на резисторе R_1, поскольку через него при этом проходит максимальный (неразветвленный) ток.

P.S. Уважаемые члены жюри, организаторы олимпиады, коллеги! Нам предстоит интересная и творческая работа по оцениванию олимпиадных работ юных дарований на втором (районном) туре Республиканской олимпиады.

Давайте на этом важном этапе проверим вдумчиво, спокойно, рассудительно. Не бойтесь находить юные таланты, не пропустите оригинальность, «ловкость» разума и трудолюбие!

Если решения некоторых задач, представленные участниками олимпиады (а они – люди творческие!!!), отличаются от авторских, но при этом получен правильный ответ, то (после внимательного прочтения!!) подкорректируйте «Схему оценивания» и смело ставьте баллы! Дети порой мыслят нестандартно, но, по сути, верно. Помните, что наша основная задача – не потерять юное дарование на начальных этапах олимпиады. ☺

Напоминаем, что на олимпиаде по физике разрешается (приветствуется!) пользование инженерным калькулятором, например, таким как «CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)»*, достаточно распространенным среди одаренных ребят.*

По всем вопросам при проведении теоретического тура олимпиады обращаться по телефону: + 375 29 766 12 87 *(Леонид Григорьевич Маркович),* + 375 44 544 49 55 *(Артём Максимович Пивоварчик),* + 375 29 190 66 79 *(Владислав Викторович Климашонок).*